Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

рівень: ***магістр***

на тему ***«Функція керованості як час руху для лінійних систем»***

Виконав: студент групи МП62 II курсу (другий магістерський рівень), спеціальності 113 "Прикладна математика" освітньо-професійної програми "Прикладна математика"
Андрієнко Т.В.

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри прикладної математики
Коробов В.І.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, професор, провідний науковий співробітник математичного відділення ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України
Фардигола Л.В.

Харків — 2024 рік

Анотації

Андрієнко Таїсія Віталіївна. Функція керованості як час руху для лінійних систем. Розглянуто спосіб побудови функції керованості як часу руху. Для двовимірної та тривимірної канонічних систем розширено множини параметрів, для яких значення функції керованості буде часом руху довільної точки в початок координат. Знайдено траєкторії в загальному вигляді та для деяких початкових точок, в тому числі для параметрів, за яких рівняння коробова має неєдиний розв'язок.

Ключові слова: керованість; функція керованості; функція керованості як час руху

Andriienko Taisiia. Controllability function as time of motion for linear systems. The method for constructing the controllability function as motion time is studied. For two- and three-dimensional canonical systems, the parameter sets are extended. General trajectories are found, along with specific ones for selected initial points. Cases with non-unique solutions of the Korobov equation are also addressed.

Keywords: controllability; controllability function; controllability function as the time of movement

Зміст

Вступ

Одним із ключових завдань теорії керування є задача допустимого позиційного синтезу в деякому околі Q початку координат. Це завдання полягає у побудові керування $u = u(x)$ для керованої системи диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(x, u)$, де $x \in R^n, u \in \Omega \subset R^r$. Керування має задовольняти обмеження $u \in \Omega$ і забезпечувати існування розв'язку так, щоб траєкторія системи, яка починається з довільної точки x_0, досягала початку координат за скінченний час $T = T(x_0)$.

Ця задача тісно пов'язана із задачами оптимального синтезу та стабілізації. У задачі оптимального синтезу керування $u(x)$ вибирається таким чином, щоб час досягнення початку координат із кожної точки був мінімальним. Її розв'язок описується рівнянням Беллмана:

$$\min_{u\in\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(t,x)}{\partial x_i} f_i(x,u) \right) = -1, \tag{0.1}$$

розв'язання якого є досить складним. У задачі стабілізації обирається таке керування $u(x)$, що розв'язок системи є асимптотично стійким.

Для розв'язання задачі синтезу у 1979 році В. І. Коробовим було запропоновано метод функції керованості, описаний у статті [1] та розвинутий у наступних роботах. Метод дозволяє визначити функцію керованості як час руху з довільної початкової точки до початку координат. У роботах [2, 3] також було визначено множину керувань, які вирішують задачу синтезу. У [4] запропоновано розширену множину керувань для двовимірних канонічних систем.

У даній роботі показано, що визначник матриці F може обертатися у нуль, а F^1 може змінювати свій знак. Визначено умови для параметрів, за яких керування залишається обмеженим, а траєкторії системи досягають початку координат. Для двовимірного та тривимірного випадків побудовано траєкторії, що забезпечують досягнення заданої початкової точки початку координат. Показано, що можуть існувати декілька траєкторій в зв'язку з неєдиністю існування кореня.

У першому розділі викладено основи методу функції керованості, а також сформульовано теореми та твердження, які є основою для подальших досліджень.

У другому розділі роботи проведено аналіз загального алгоритму побудови функції керованості як часу руху. Сформульовано задачу визначення множини параметрів, за яких функція керованості відповідає часу руху довільної точки до початку координат. Наведено результати розв'язання цієї задачі для двовимірних і тривимірних систем, а також приклади реалізації.

Розділ 1

Метод функції керованості

1.1. Постановка задачі синтезу

Однією з задач теорії керування є задача допустимого позиційного синтезу в деякому околі Q початку координат. Нехай

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

керована система диференціальних рівнянь, де $x \in R^n, u \in \Omega \subset R^r$. Задача полягає у побудові такого керування $u = u(x)$, що задовольняє заданим обмеженням $u \in \Omega$ та такого, що існує розв'язок та траєкторія системи

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{1.2}$$

з початком в довільній точці x_0, потрапляє в початок координат за деякий скінченний час $T = T(x_0)$.

Зауважимо, оскільки через початок координат проходить нескінченна кількість траєкторій системи (1.1) і час руху по кожній із них скінчений, то права частина рівняння не може задовольняти умовам теореми єдиності.

Для розв'язання поставленої задачі в 1979 році Коробовим В.І. було запропоновано метод функції керованості [1].

1.2. Метод функції керованості

Для автономних керованих систем вигляду (1.1) вірною є наступна теорема [1]:

Теорема 1.1. *Розглянемо керований процес, що описується рівнянням (1.1), де* $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, *вектор функція* $f(x, u)$ *в кожній точці області* $\{(x, u) : 0 < \rho_1 \le ||x|| \le \rho_2, u \in \Omega\}$ *задовольняє умові Ліпшиця*

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \le L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Нехай існує функція $\Theta(x)$, *яка задовольняє умовам:*

1. $\Theta(x) \ge 0$ *при* $x \ne 0$ *і* $\Theta(0) = 0$;
2. $\Theta(x)$ *неперервна всюди і неперервно диференційовна всюди крім, можливо точки* $x = 0$;
3. *існує число* $c > 0$ *таке, що множина* $\mathbb{Q} = \{x : \Theta(x) \le c\}$ *є обмеженою і* $\mathbb{Q} \subset \{x : \|x\| < R\}$;
4. *існує функція* $u(x) \in \Omega$ *при* $x \in \mathbb{Q}$, *яка задовольняє нерівності*

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \le -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$$

при деяких $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$, *причому* $u(x)$ *в кожній області* $K(\rho_1, \rho_2) \le \{x \in \mathbb{Q} : 0 < \rho_1 \le \|x\| \le \rho_2\}$ *задовольняє умові Ліпшиця, тобто*

$$\|u(x'') - u(x')\| \le L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\| \, \forall \, x', x'' \in K(\rho_1, \rho_2),$$

причому $L_2(\rho_1, \rho_2) \to +\infty$ *при* $\rho_1 \to 0$.

Тоді траєкторія $x(t)$ *системи* $\dot{x} = f(x, u(x))$, *з початком в довільній точці*

$x_0 \in \mathbb{Q}$ в момент часу $t = 0$, потрапляє в точку $x_1 = 0$ в деякий момент часу $T(x_0) \le (\alpha/\beta)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, $x(t) \in \mathbb{Q}$, $x(t) = 0$ при $x(t) = 0$ при $t > T(x_0)$, причому, якщо $\alpha = \infty$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Функція $\Theta(x)$ називається функцією керованості і є аналогом функції Ляпунова, умови 1-3 даної теореми збігаються з умовами теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Зауважимо, що виконання умови 4 при $\alpha > 0$ забезпечує скінченність часу потрапляння довільної точки в початок координат. Якщо $\alpha = \infty$ функція $\Theta(x)$ буде функцією Ляпунова отриманої системи.

У випадку коли $\alpha = \beta = 1$, а замість нерівності виконується рівність, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1, \tag{1.3}$$

функція керованості $\Theta(x)$ буде часом руху $T(x)$ із довільної точки в початок координат.

Якщо крім цього $u(x)$ така, що виконується рівняння Беллмана:

$$\min_{u \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \right) = -1, \tag{1.4}$$

функція $\Theta(x)$ буде також часом швидкодії.

1.3. Розв'язок задачі синтеза для канонічної системи

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = u, \end{cases} \tag{1.5}$$

з обмеженням на керування $|u| \leq d$. Будемо називати цю систему канонічною. Дана система є центральною в методі, що розглядається. Для канонічної системи розв'язок задачі синтезу може бути знайдений у всьому просторі $\mathbb{R}^n$ і розв'язання задачі синтезу для довільної лінійної системи може бути зведено до розв'язання задачі для канонічної.

Коротко приведемо метод розв'язання задачі синтезу для канонічної системи [1]. Оберемо допоміжне керування $u_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n = (a, x)$ таке, щоб нульовий розв'язок системи $\dot{x} = Ax + bu = A_1x$ був асимптотично стійким. В цьому випадку для даної системи існує деяка функція Ляпунова $V(x)$, яку можна записати у вигляді деякої додатно визначеної квадратичної форми:

$$V(x) = (Fx, x). \tag{1.6}$$

Функцію керованості $\Theta(x)$ в кожній точці $x \neq 0$ задамо як додатний розв'язок рівняння

$$2a_0\Theta = (F(\Theta)x, x), \tag{1.7}$$

де a_0 поки що довільне додатне число, $(F(\Theta)x,x) = (D(\Theta)FD(\Theta)x,x)$.

$$D(\Theta) = \operatorname{diag}\left(\Theta^{-\frac{m+n-2i+1}{2\alpha}}\right)_{i=1}^{n}$$

а числа $m \in \mathbb{N}, \alpha \geq 1$ обираються так, щоб матриця

$$F^{\alpha} \equiv F - H^{\alpha}F - FH^{\alpha} = \left(\left(1 + \frac{n+m-i-j+1}{\alpha}\right) f_{ij}\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$\text{де } H^{\alpha} = \operatorname{diag}\left(-\frac{m+n-2i+1}{2\alpha}\right)_{i=1}^{n},$$

була додатно визначеною.

Таким чином відмітимо, що на відміну від функції Ляпунова, що шукається в явному вигляді, функція керованості в кожній точці задається як розв'язок неявного рівняння.

Виконання описаних вище умов гарантує існування та єдиність додатного кореня Θ_0 функції

$$\Phi(\Theta, x) = 2a_0\Theta - (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$$

для довільного $x = x_0$ та додатність похідної цієї функції в точці Θ_0. З цього та з теореми про неявну функцію випливає неперервність та неперервна диференційовність при $x \neq 0$ функції $\Theta(x)$.

Зауважимо, що окрім додатного дана функція має також єдиний від'ємний корінь.

Керування $u(x)$, що є розв'язком задачі синтезу, матиме наступний вигляд

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{\Theta^{\frac{n-i+1}{\alpha}}(x)}. \tag{1.8}$$

Для виконання заданих обмежень число a_0 обирається так, щоб виконувалась умова: $0 < \sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} \leq d$.

З вигляду $u(x)$ видно, що функція керованості також входить у керування. Тому для знаходження конкретної траєкторії з початком в точці x_0 необхідно знайти розв'язок рівняння (1.7) $\Theta(x_0)$, та чисельно розв'язати задачу Коші розмірності $n+1$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = u(x), \\ \dot{\Theta} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)). \end{cases} \tag{1.9}$$

Розділ 2

Функція керованості як час руху

2.1. Побудова функції керованості як часу руху

Як уже було зазначено вище, для скінченності часу руху має виконуватись оцінка:

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \tag{2.1}$$

Частинним випадком цієї нерівності є рівняння при $\alpha = \beta = 1$

$$\dot{\Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) = -1 \tag{2.2}$$

У цьому випадку функція керованості є часом руху із точки x у початок координат.

Розглянемо канонічну систему з обмеженнями на керування $|u| \leq d$. Як і в основному методі, оберемо керування у вигляді

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{\Theta^{n-i+1}(x)}. \tag{2.3}$$

Позначимо $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^*, a_i < 0$.

А функція керованості при $x \neq 0$ визначена як єдиний додатній корінь рівняння

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x)$$

де $D(\Theta) = diag(\Theta^{-\frac{-2n-2i+1}{2}})_{i=1}^{n}$, матриця $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, а $a_0 > 0$ буде обиратися так, щоб виконувались обмеження на керування. Значення для a_0 виражається [1] з рівняння $2a_0 = \dfrac{1}{(F^{-1}a, a)}$. Якщо $x = 0$, покладемо $\Theta(x) = 0$.

Покладемо $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$. Тоді функція керованості задовільняє

$$2a_0\Theta(x) = (Fy(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)). \tag{2.4}$$

Похідна функції керованості має вигляд

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{((F(A_0 + b_0a^*) + (A_0 + b_0a^*)^*F)\, y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x))}{((F - HF - FH)y(\Theta(x), x), y(\Theta(x), x)))},$$

тобто

$$\dot{\Theta}(x) = \frac{F(A_0 + b_0a^*) + (A_0 + b_0a^*)^*F}{F - HF - FH}, \tag{2.5}$$

де $b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $H = diag(-\dfrac{2n - 2i + 1}{2})_{i=1}^{n}$.

Матриця $F^1 = F - HF - FH$ має наступний вигляд

$$F^1 = ((2n + 2 - i - j)f_{ij})_{i,j=1}^{n}. \tag{2.6}$$

Прирівнявши вираз для похідної (2.5) до -1, отримаємо матричне рівняння

$$F(A_0 + b_0a^*) + (A_0 + b_0a^*)^*F + F^1 = 0. \tag{2.7}$$

Наша задача полягає в тому, щоб обрати матрицю F і вектор-стовпець a так, щоб виконувалась матрична рівність. Тоді функція керованості $\Theta(x)$ буде часом руху із точки x у початок координат.

Ця задача розглядалась в роботах [2, 3], там було виділено окремий випадок, коли матриця F^{-1} мала подання у вигляді $F^{-1} = D_n C D_n$. Причому матриця C - Ганкелева матриця $C = (c_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$, а $D_n = diag((-1)^{n-i}/(n-i)!)_{i=1}^{n}$. В роботі [7] розглядався клас функцій керованості без обмежень на вигляд F^{-1}, але накладалися дві додаткові умови на додатну визначеність матриць F та F^1 [1]. В нашій роботі не вимагається додатна визначеність матриці F та F^1, знаменник може обертатись в нуль. Крім того, умова додатності накладається лише на діагональні елементи матриці $f_{ii} > 0$. Ця умова є достатньою умовою існування щонайменш одного додатного розв'язку. В зв'язку з тим, що ми не вимагаємо додатну визначеність матриці F^1, знаменник може змінювати свій знак і рівняння відносно Θ може мати більше ніж один додатній корінь.

Розглянемо алгоритм побудови функції керованості. Будуємо систему рівнянь (2.7) та виписуємо матрицю m системи. Для існування нетривіального рішення необхідно і достатньо, щоб визначник m дорівнював нулю. З цього рівняння можемо отримати умови, з яких визначається один із параметрів a_i. Підставляємо відомі параметри в систему рівнянь та розв'язуємо її. Отримуємо матрицю F, зауважимо, що вона не обов'язково буде додатно визначеною. Щоб знайти оцінки для параметрів a_i, зведемо систему (1.5) до рівняння Ейлера $(\Theta_0 - t)^n x_1^{(n)} - (\Theta_0 - t)^{n-1} a_n x_1^{(n-1)} - ... - a_1 x_1 = 0$. Знаходимо характеристичне рівняння та його корені. Рівняння можна отримати, якщо шукати розв'язок у вигляді $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^\lambda$. Отримані значення x_i підставляємо у вираз для u. Для обмеженості керування маємо обирати параметри так, щоб не було ділення на значення близькі до нуля. Звідси отримуємо, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння мають бути більші за n. Тоді траєкторія системи переводить задану початкову точку в початок координат та обмеження на керування виконано. З цієї умови і отримуються оцінки на параметри a_i.

Далі виписуємо рівняння (2.4) відносно $\Theta(x)$ та розв'язуємо його для обраної початкової точки. Перейдемо до двовимірного і тривимірного випадків та розглянемо такі приклади, де не виконано умови додатної визначеності але траєкторія переводить задану початкову точку в початок координат.

2.1.1. Двовимірний випадок

Розглянемо рішення задачі синтезу. Система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{2.8}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}, \quad F^1 = \begin{pmatrix} 4f_{11} & 3f_{12} \\ 3f_{12} & 2f_{22} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Рівняння $FA_1 + A_1^*F + F^1 = 0$ має вигляд

$$\begin{cases} 2f_{11} + a_1 f_{12} = 0, \\ f_{12} + (a_2+1) f_{22} = 0, \\ f_{11} + (a_2+3) f_{12} + a_1 f_{22} = 0. \end{cases}$$

Виписуємо матрицю цієї системи

$$m = \begin{pmatrix} 2 & a_1 & 0 \\ 1 & 3+a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Для існування нетривіального розв'язку необхідно і достатньо, щоб визначник матриці m дорівнював нулю. Тобто $2a_2^2 - a_1a_2 - 3a_1 + 8a_2 + 6 = 0$.

Отримуємо два розв'язки цього рівняння $a_2 = -3$ та $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 - 2)$.

Розглянемо випадок, коли $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 - 2)$. Система має розв'язок

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & -\dfrac{2f_{11}}{a_1} \\ -\dfrac{2f_{11}}{a_1} & \dfrac{4f_{11}}{a_1^2} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що визначник матриці F дорівнює нулю.

Зводимо систему до рівняння Ейлера $(\Theta_0 - t)^2 \ddot{x}_1 - a_2(\Theta_0 - t)\dot{x}_1 - a_1 x_1 = 0$. Шукаємо розв'язок у вигляді $x_1(t) = (\Theta_0 - t)^\lambda$ та знаходимо характеристичне рівняння $\lambda(\lambda - 1) + a_2\lambda - a_1 = 0$. Для параметра $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 - 2)$ воно має два корені $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$.

Маємо вираз для x_1 та x_2

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1(\Theta_0 - t)^2 + c_2(\Theta_0 - t)^{-\frac{a_1}{2}}, \\ x_2(t) &= -2c_1(\Theta_0 - t) + \frac{a_1}{2} c_2 (\Theta_0 - t)^{-\frac{a_1}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Випишемо керування даної системи $u = \frac{a_1 x_1}{(\theta_0 - t)^2} + \frac{a_2 x_2}{(\theta_0 - t)}$. Підставляємо отримані вирази для x_1 та x_2 і отримуємо

$$u = (a_1 + 2a_2)c_1 + a_1 c_2 (1 - \frac{a_2}{2})(\theta_0 - t)^{-\frac{a_1}{2} - 2}.$$

Для обмеженості u множник $(\theta_0 - t)^{-\frac{a_1}{2} - 2}$ має бути у чисельнику, бо він прямує до нуля, коли t наближується до θ_0. Це виконується за умови, що $-\frac{a_1}{2} \geq 2$, отримуємо оцінку $a_1 < -4$. Випадок, коли $a_1 = -4$ розглянемо окремо. Константи c_1 та c_2 знаходимо з початкових умов

$$c_1 = \frac{a_1 x_{10} - 2x_{20}\Theta_0}{(a_1 + 4)\Theta_0^2}, c_2 = \frac{4x_{10} + 2x_{20}\Theta_0}{(a_1 + 4)\Theta_0^{-a_1/2}}$$

Підставляємо та отримуємо керування

$$u = \frac{2a_1x_{10}}{(a_1+4)\Theta_0^2} - \frac{4x_{20}}{(a_1+4)\Theta_0} + \frac{\Theta_0^{a_1/2}a_1(a_1+2)(2x_{10}+\Theta_0x_{20})}{2(a_1+4)}(\theta_0-t)^{-\frac{a_1}{2}-2}.$$

Залишається знайти значення θ_0, для цього виписуємо рівняння (2.4) та розв'язуємо його для обраної початкової точки.

Також розглянемо випадок, коли $a_1=-4$. Тоді $\lambda=2$ корінь кратності два.

Рівняння траєкторії

$$x_1(t) = (c_1+c_2\ln(\Theta_0-t))(\Theta_0-t)^2,$$
$$x_2(t) = -(2c_1+c_2+2c_2\ln(\Theta_0-t))(\Theta_0-t).$$

Керування

$$u = 2c_1+c_2(3+2\ln(\Theta_0-t))$$

З початкових умов

$$c_1 = \frac{x_{10}+(2x_{10}+\Theta_0x_{20})\ln\Theta_0}{\Theta_0^2}, c_2 = -\frac{2x_{10}+\Theta_0x_{20}}{\Theta_0^2},$$

$$u = 2\frac{x_{10}+(2x_{10}+\Theta_0x_{20})\ln\Theta_0}{\Theta_0^2} - \frac{2x_{10}+\Theta_0x_{20}}{\Theta_0^2}(3+2\ln(\Theta_0-t)).$$

Через доданок $\ln(\Theta_0-t)$ керування не може бути обмеженим. Аргумент логарифму прямує до нуля, тому керування прямуватиме до нескінченності.

Розглянемо випадок $a_2=-3$. Система (2.9) має розв'язок

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & -\dfrac{2f_{11}}{a_1} \\ -\dfrac{2f_{11}}{a_1} & -\dfrac{f_{11}}{a_1} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Визначник матриці F дорівнює $-(\frac{1}{a_1}+1)\frac{1}{a_1}f_{11}^2$.

Характеристичне рівняння $\lambda(\lambda-1)+a_2\lambda-a_1=0$ при $a_2=-3$ має два корені $\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{4+a_1}$.

Розв'язок системи

$$x_1(t)=c_1(\Theta_0-t)^{2+\sqrt{4-a_1}}+c_2(\Theta_0-t)^{2+\sqrt{4+a_1}},$$
$$x_2(t)=-(2-\sqrt{4+a_1})c_1(\Theta_0-t)^{1-\sqrt{4+a_1}}-(2+\sqrt{4+a_1})c_2(\Theta_0-t)^{1+\sqrt{4+a_1}}.$$

Керування

$$u=(a_1+3(2-\sqrt{4+a_1}))c_1(\Theta_0-t)^{-\sqrt{4+a_1}}+(a_1+3(2+\sqrt{4+a_1}))c_2(\Theta_0-t)^{\sqrt{4+a_1}}$$

З початкових умов

$$c_1=\frac{(2+\sqrt{4+a_1})x_{10}+\Theta_0x_{20}}{2\sqrt{4+a_1}\Theta_0^{2-\sqrt{4+a_1}}},c_2=\frac{(-2+\sqrt{4+a_1})x_{10}-\Theta_0x_{20}}{2\sqrt{4+a_1}\Theta_0^{2+\sqrt{4+a_1}}},$$

$$u=\frac{(a_1+3(2-\sqrt{4+a_1}))(2+\sqrt{4+a_1})x_{10}+\Theta_0x_{20}}{2\sqrt{4+a_1}\Theta_0^{2-\sqrt{4+a_1}}}(\Theta_0-t)^{-\sqrt{4+a_1}}+$$
$$+\frac{(a_1+3(2+\sqrt{4+a_1}))(-2+\sqrt{4+a_1})x_{10}-\Theta_0x_{20}}{2\sqrt{4+a_1}\Theta_0^{2+\sqrt{4+a_1}}}(\Theta_0-t)^{\sqrt{4+a_1}}$$

Аналогічно траєкторія системи потрапляє в нуль та керування є обмеженим, за умови, що дійсні частини коренів більші або рівні двом. Тобто $\pm\sqrt{4+a_1}\geq 0$. Отримуємо оцінку $a_1<-4$. Значення $a_1=-4$ було розглянуто раніше, тому відкидається.

На відрізку $-\frac{9}{2}<a_1<-4$ існує завжди щонайменше один розв'язок Θ_0 рівняння (2.4), але він не є обов'язково єдиним [4]. Це відбувається оскільки знаменник (2.5) на інтервалі не є додатно визначеною матрицею.

За формулою $2a_0 = \dfrac{1}{(F^{-1}a, a)}$, маємо $a_0 = 0.0003$. Тут і в наступних прикладах ми поклали $f_{11} = 1$, оскільки значення не впливає на розв'язки рівняння та $a_1 = -4.01$. Обираємо початкову точку $\{0.5, -0.5\}$. Рівняння має три корені: $\Theta_0 = 1.72258, \Theta_0 = 2.7386, \Theta_0 = 7.31107$.

Для кожного кореня вдалось побудувати траєкторію (див. рис. 2.1) та знайти керування (див. рис. 2.2).

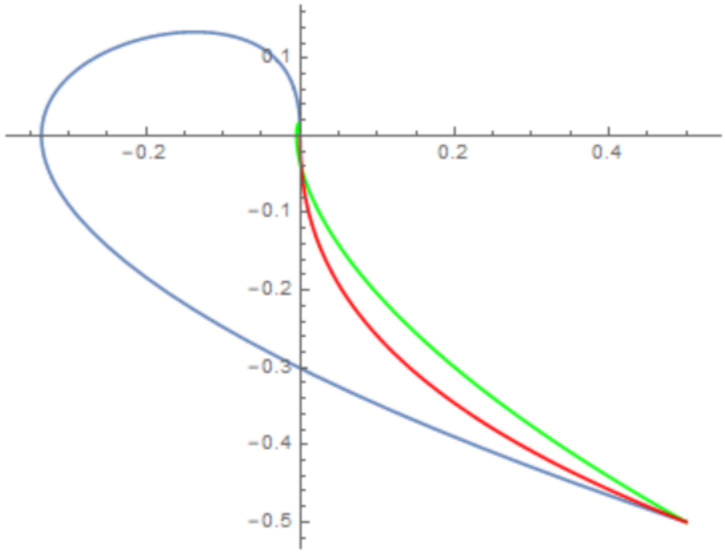


Рис. 2.1: Траєкторії для різних величин часу руху.

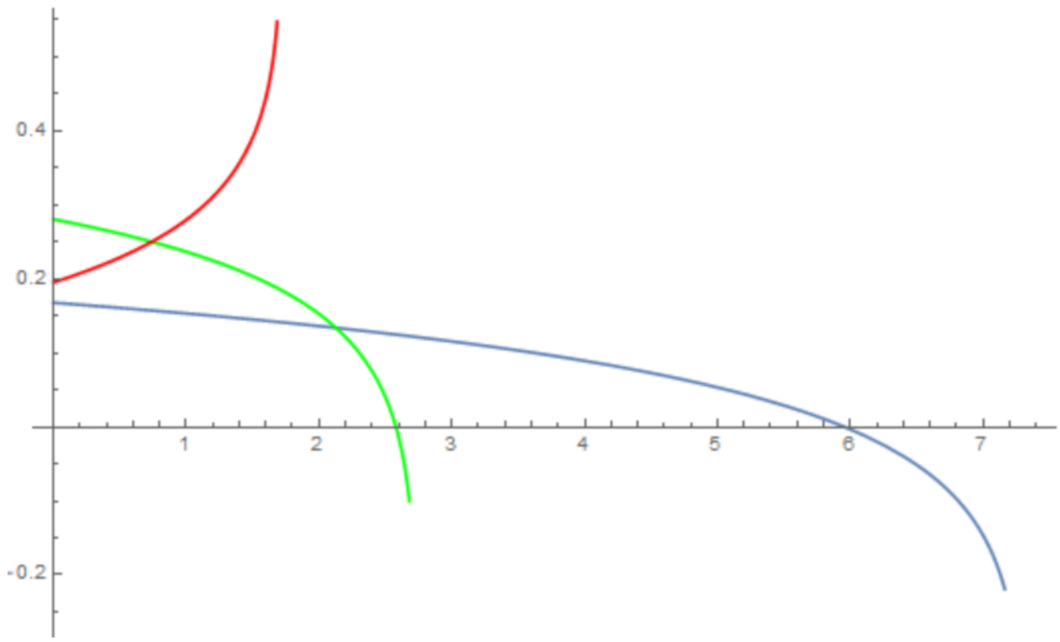


Рис. 2.2: Керування для кожного розв'язку рівняння.

Якщо величину a_0 зменшимо в 15.96089 разів, отримаємо $a_0 = 0.000019$. Для тієї ж початкової точки $\{0.5, -0.5\}$ рівняння має два корені: $\Theta_0 = 2.01005, \Theta_0 = 38.0898$.

Для кожного кореня вдалось побудувати траєкторію (див. рис. 2.3) та знайти керування (див. рис. 2.4). Усі розрахунки та побудова траєкторій для двовимірного випадку наведені у Додатку А.

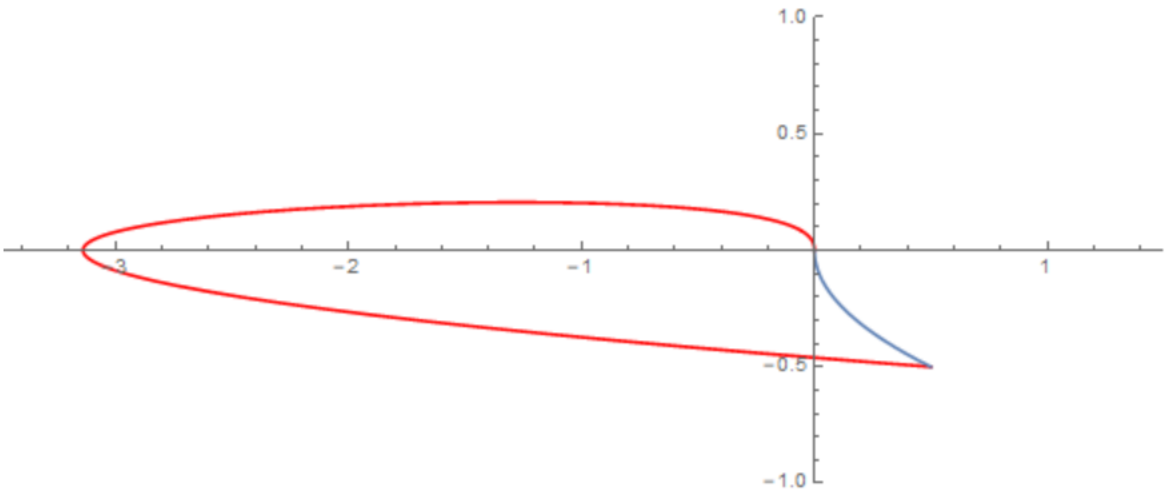


Рис. 2.3: Траєкторії для різних величин часу руху.

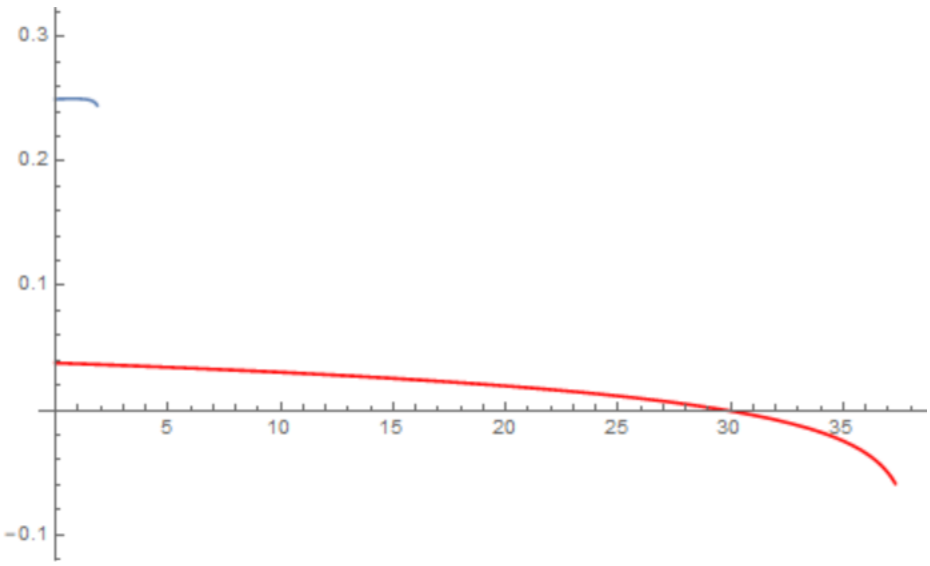


Рис. 2.4: Керування для кожного розв'язку рівняння.

Множина параметрів, для яких функція керованості є часом руху із деякої точки в початок координат, може бути розширена. На проміжку

$(-\dfrac{9}{2};-4)$ вдалось побудувати функцію керованості та знайти траєкторії системи такі, що керування є обмеженим. Було розглянуто випадок, коли матриці F та F^1 не є додатно визначеними. Отже, застосовність функції керованості може бути розширена.

2.1.2. Тривимірний випадок

Розглянемо розв'язання задачі синтезу.

Система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \tag{2.12}$$

У цьому випадку

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad F^1 = \begin{pmatrix} 6f_{11} & 5f_{12} & 4f_{13} \\ 5f_{12} & 4f_{22} & 3f_{23} \\ 4f_{13} & 3f_{23} & 2f_{33} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Виписуємо рівняння $FA_1 + A_1^* F + F^1 = 0$ та складаємо матрицю m системи

$$m = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & a_2 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 4+a_3 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3+a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+a_3 \end{pmatrix}.$$

Для існування нетривільного розв'язку необхідно і достатньо, щоб визначник матриці дорівнював нулю $\det\ m = -2a_1^2 - 2a_1a_2a_3 + 10a_1a_3^2 + 58a_1a_3 + 108a_1 + 6a_2^2a_3 + 18a_2^2 - 42a_2a_3^2 - 258a_2a_3 - 396a_2 + 60a_3^3 + 480a_3^2 +$

$1140a_3 + 720 = 0$.

Отримуємо корені $a_1 = 3(a_2 - 2a_3 - 2)$ та $a_1 = -(a_2 - 5a_3 - 20)(3 + a_3)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли визначник матриці F не дорівнює нулю. Коефіцієнти при парних степенях λ визначника дорівнюють нулю.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3-\lambda \end{pmatrix} = 6+a_1-3a_2+6a_3+(a_2-5a_3-11)\lambda+(a_3+6)\lambda^2-\lambda^3.$$

Отже $a_1 = 3(10 + a_2)$ та $a_3 = -6$.

З того, що похідна $\Theta'(t)$ дорівнює -1 отримуємо значення параметрів матриці F

$$F = \begin{pmatrix} -(10+a_2)f_{13} & 2f_{13} - \frac{3}{5}(10+a_2)f_{23} & f_{13} \\ 2f_{13} - \frac{3}{5}(10+a_2)f_{23} & -f_{13} + (3 - \frac{1}{5}a_2)f_{23} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & \frac{1}{5}f_{23} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

Повернемось до випадку, коли $\det m = 0$ та покажемо, що визначник матриці F дорівнює нулю, а $\det F^1$ змінює знак.

Розглянемо $a_1 = -(a_2 - 5a_3 - 20)(3 + a_3)$. Після підстановки, система має розв'язок

$$F = \begin{pmatrix} (a_3+3)^2(5(4+a_3)-a_2) & (3+a_3)(a_2-2(4+a_3)) & -3(3+a_3) \\ (3+a_3)(a_2-2(4+a_3)) & 12-a_2+7a_3+a_3^2 & -(1+a_3) \\ -3(3+a_3) & -(1+a_3) & 1 \end{pmatrix} f_{33}, \tag{2.14}$$

Визначник цієї матриці дорівнює нулю. Знайдемо визначник F^1 та покажемо, що він змінює свій знак.

А саме $\det F^1 = -2(a_3 + 3)^2(a_2^2 - a_2(3a_3^2 + 46a_3 + 127) + 15a_3^3 + 238a_3^2 + {}$ $+1031a_3 + 1276)f_{33}$. Він набуває як від'ємних, так додатних і нульових значень.

Знайдемо оцінки на параметри a_i, для яких відбувається потрапляння в нуль. Зводимо систему до рівняння Ейлера та виписуємо його характеристичне рівняння $-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-a_3\lambda(\lambda-1)+a_2\lambda-a_1=0$. Розв'язуємо за умови $a_1=-(a_2-5a_3-20)(3+a_3)$.

Отримуємо $\lambda_1=-3-a_3$ та $\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{-11+a_2-5a_3}\right)$.

Траєкторія системи переводить довільну початкову точку в початок координат за умови, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння більші за 3. Звідси оцінки $a_3<-6$ та $a_2<11+5a_3$.

Наприклад, оберемо a_2 та a_3 наступним чином $a_2=-\frac{49}{2}, a_3=-7$. Покладемо $f_{33}=1$, тоді $a_1=-38 \det F^1=-8<0$. Для початкової точки $\{-1,-2,5\}$ розв'язується задача синтезу і траєкторія системи (див. рис.2.5) потрапляє в нуль за час $\Theta_0\approx 47,42$.

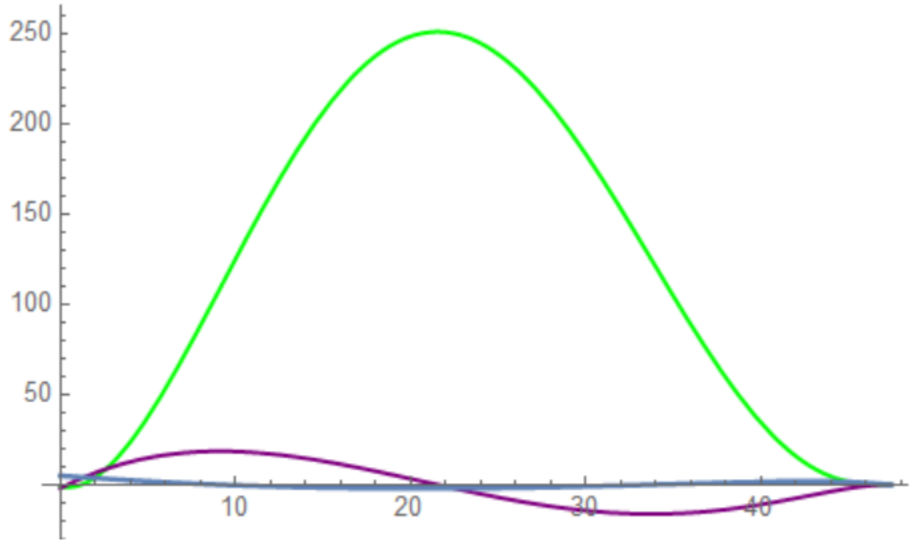


Рис. 2.5: Траєкторії для $a_2=-\frac{49}{2}, a_3=-7$.

За параметрів $a_2=-22, a_3=-\frac{13}{2}$ маємо $a_1=\frac{-133}{4}$,$\det F^1=\frac{343}{16}>0$. Та ж початкова точка потрапляє в нуль за час $\Theta_0\approx 68,41$, див. рис.2.7 та рис.2.8.

Знайдемо значення, для яких $\det F^1=0$.

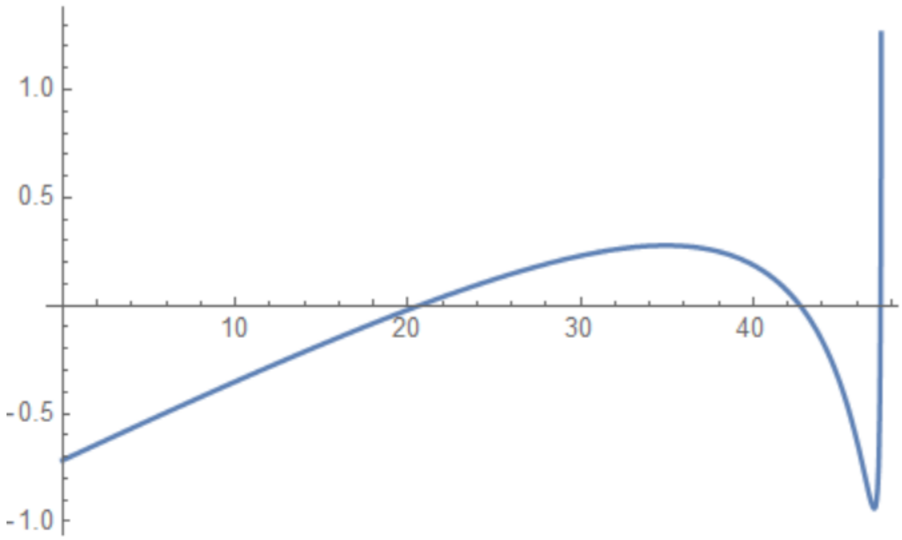


Рис. 2.6: Керування для $a_2 = -\dfrac{49}{2}, a_3 = -7$.

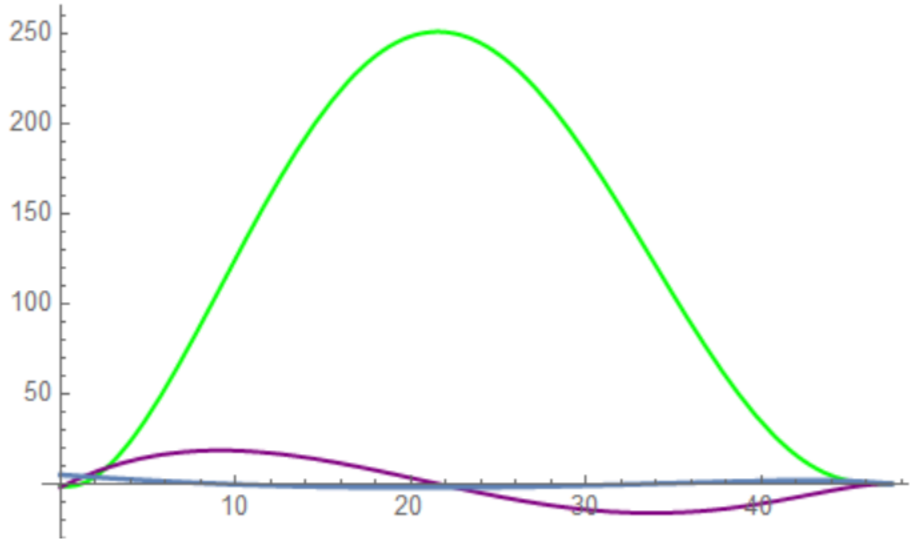


Рис. 2.7: Траєкторія, коли $a_2 = -22, a_3 = -\dfrac{13}{2}$.

Розв'язками цього рівняння є $a_2 = 11 + 5a_3$ та $a_2 = 116 + 41a_3 + 3a_3^2$.

При $a_2 = 11 + 5a_3$ розв'язок характеристичного рівняння Ейлера має вигляд $\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = -3 - a_3$ та відповідно оцінка на параметр $a_3 < -6$.

У випадку $a_2 = 116 + 41a_3 + 3a_3^2$ рівняння має такі рішення $\lambda_1 = -3 - a_3, \lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3}\sqrt{35 + 12a_3 + a_3^2}$. Звідси $-7 < a_3 < -6$.

Та ж точка при параметрах $a_2 = -22, a_3 = -6$ потрапляє у нуль за час $\Theta_0 \approx 76,98$, див. рис.2.9 та рис.2.10. Причому $\det F^1 = 0$.

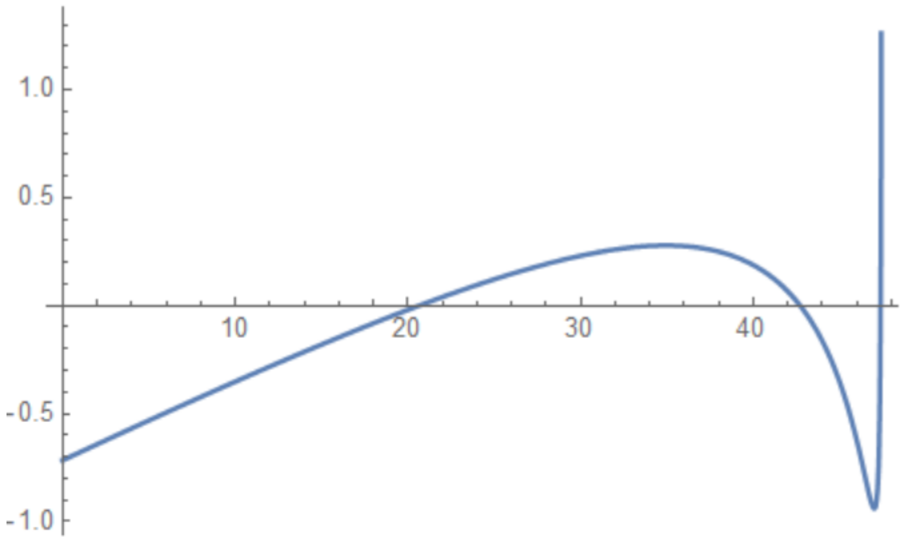


Рис. 2.8: Керування, коли $a_2 = -22, a_3 = -\dfrac{13}{2}$.

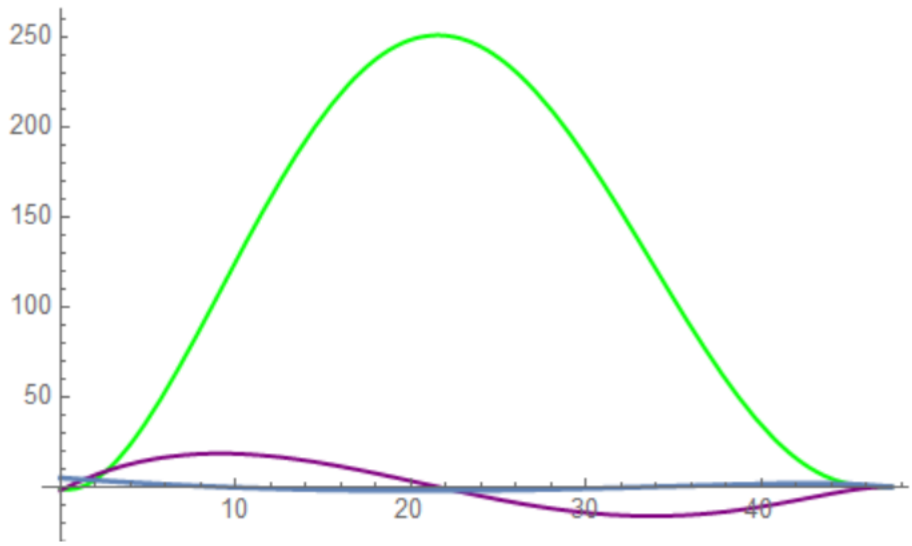


Рис. 2.9: Траєкторія, коли $a_2 = -22, a_3 = -6$.

Розглянемо $a_1 = 3(a_2 - 2a_3 - 2)$. Підставляємо та розв'язуємо систему

$$F = \begin{pmatrix} (a_2 - 2(1+a_3))^2 & (1+a_3)(a_2 - 2(1+a_3)) & -(a_2 - 2(1+a_3)) \\ (1+a_3)(a_2 - 2(1+a_3)) & (1+a_3)^2 & -(1+a_3) \\ -(a_2 - 2(1+a_3)) & -(1+a_3) & 1 \end{pmatrix} f_{33}, \tag{2.15}$$

Визначник цієї матриці дорівнює нулю. Визначник матриці F^1 також нуль.

Знайдемо оцінки на параметри a_i, для яких відбувається потрапляння

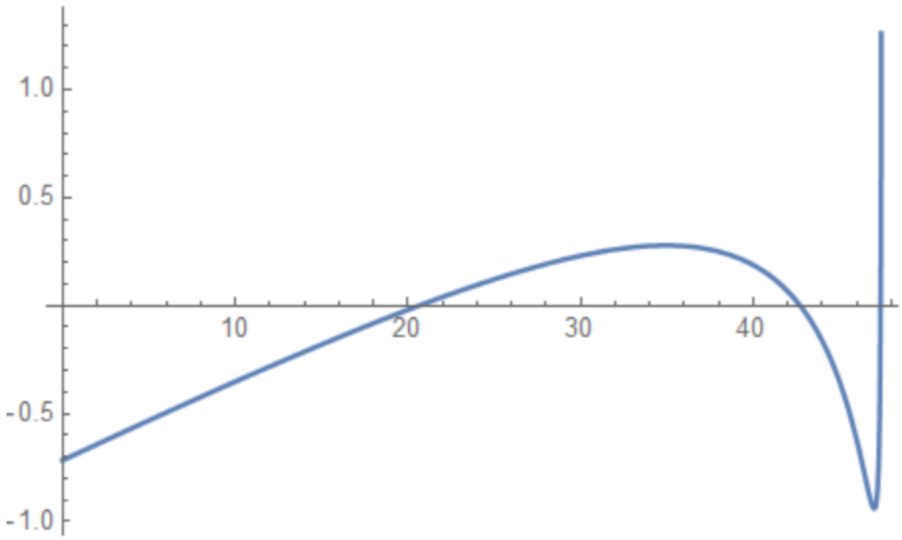


Рис. 2.10: Керування, коли $a_2 = -22, a_3 = -6$.

в нуль. З характеристичного рівняння для обраного параметра a_1 отримуємо $\lambda_1 = 3$ та $\lambda_{2,3} = \dfrac{1}{2}\left(-a_3 \pm \sqrt{4a_2 + a_3^2 - 8a_3 - 8}\right)$. Усі розрахунки та побудова траєкторій для тривимірного випадку наведені у Додатку Б.

Траєкторія системи переводить довільну початкову точку в початок координат за умови, що дійсні частини коренів характеристичного рівняння більші за 2. Звідси оцінки $a_3 < -6$ та $a_2 \leq 11 + 5a_3$.

Отже, було розглянуто нові випадки, коли $\det F = 0$. При цьому для різних значень визначника матриці F^1 була побудована функція керованості та знайдено траєкторії руху в початок координат. Знайдено значення для яких знаменник обертається у нуль та показано, що для них також існує розв'язок задачі синтезу.

Висновки

У даній роботі було досліджено метод функції керованості в задачах допустимого синтезу для лінійних канонічних систем. Завдяки послабленню вимог до матриць F та F^1, розглянуто узагальнену задачу побудови керування, при якому функція керованості відповідає часу руху.

У результаті визначено множину параметрів для дво- та тривимірних канонічних систем, за яких значення функції керованості дорівнює часу руху довільної точки до початку координат. Наведені приклади демонструють, що матриця F може не бути додатно визначеною, а визначник F^1 — змінювати знак або навіть дорівнювати нулю. Для множини параметрів, на яких порушується додатна визначеність матриці F, показано, що розв'язок рівняння може бути неєдиним, що призводить до існування кількох можливих траєкторій.

Список використаних джерел

[1] V. I. Korobov, A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem, Math. USSR-Sb.,37:4 (1980), 535-557

[2] V. I. Korobov, A. E. Choque Rivero, V.O. Skoryk: Controllability function as time of motion I, Mat. Fiz. Anal. Geom., 11(2), (2004), 208-225

[3] V. I. Korobov, A. E. Choque Rivero, V.O. Skoryk: Controllability function as time of motion II, Mat. Fiz. Anal. Geom., 11(3), (2004), 341-354

[4] A. E. Choque-Rivero, Extended set of solutions of a bounded finite-time stabilization problem via the controllability function, IMA Journal of Mathematical Control and Information, Volume 38, Issue 4, December 2021, Pages 1174-1188, https://doi.org/10.1093/imamci/dnab028

[5] A. E. Choque-Rivero, Korobov's controllability function as time of motion: Extension of the solution set of the synthesis problem, Mat. Fiz. Anal. Geom., Volume 10, Pages 1-32,

[6] V. I. Korobov; G. M Sklyar. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. Differential Equations 26, no. 11, 1422–1431 (1991)

[7] Korobov, V. I., Andriienko, T. V. (2023). Construction of controllability function as time of motion. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 97, 13-24. https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-97-02

[8] Андрієнко Т.В., Побудова функції керованості як часу руху. Кваліфікаційна робота бакалавра. Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2023.

Додаток A

Розрахунки у двовимірному випадку

У цьому додатку наведено код програми Wolfram Mathematica, який використовувався для обчислення матриць, розв'язку систем рівнянь, знаходження коренів характеристичного многочлена, розв'язку нерівностей, побудови траєкторій та побудови графіків керування у двовимірному випадку. Усі ці розрахунки подано на наступних сторінках.

```
In[105]:= A = {{0, 1}, {a1, a2}};
          F = {{f11, f12}, {f12, f22}};
          H = {{-3/2, 0}, {0, -1/2}};
          Fa = F - F.H - H.F
```

Out[108]= {{4 f11, 3 f12}, {3 f12, 2 f22}}

```
Simplify[F.A + Transpose[F.A] + Fa]
```

{{4 f11 + 2 a1 f12, f11 + (3 + a2) f12 + a1 f22},
{f11 + (3 + a2) f12 + a1 f22, 2 (f12 + f22 + a2 f22)}}

In[109]:= $m = \begin{pmatrix} 2 & a1 & 0 \\ 1 & 3 + a2 & a1 \\ 0 & 1 & 1 + a2 \end{pmatrix};$

```
Det[m]
Solve[Det[m] == 0, a1]
Solve[Det[m] == 0, a2]
```

Out[110]= $6 - 3\,a1 + 8\,a2 - a1\,a2 + 2\,a2^2$

Out[111]= $\{\{a1 \to 2\,(1 + a2)\}\}$

Out[112]= $\left\{\{a2 \to -3\}, \left\{a2 \to \frac{1}{2}\,(-2 + a1)\right\}\right\}$

$$\text{Solve}\left[\lambda\,(\lambda - 1) + a2\,\lambda - a1 == 0\ /.\ a2 \to \frac{1}{2}\,(-2 + a1),\ \lambda\right]$$

$$\left\{\{\lambda \to 2\}, \left\{\lambda \to -\frac{a1}{2}\right\}\right\}$$

$\lambda 1 = 2;$

$\lambda 2 = \frac{-a1}{2};$

$$\text{k1}[t\_] = \text{Simplify}\left[c1\,(Th0 - t)\,\hat{}\,\lambda 1 + c2\,(Th0 - t)\,\hat{}\,\lambda 2\right]\ /.\ a2 \to \frac{1}{2}\,(-2 + a1)$$

```
k2[t_] = Simplify[D[k1[t], t]]
```

$$c1\,(t - Th0)^2 + c2\,(-t + Th0)^{-a1/2}$$

$$2\,c1\,(t - Th0) + \frac{1}{2}\,a1\,c2\,(-t + Th0)^{-1-\frac{a1}{2}}$$

$$\text{Together}\left[c1\,(t - Th0)^2 + c2\,(-t + Th0)^{-a1/2}\right]$$

$$(-t + Th0)^{-a1/2}\left(c2 + c1\,t^2\,(-t + Th0)^{a1/2} - 2\,c1\,t\,Th0\,(-t + Th0)^{a1/2} + c1\,Th0^2\,(-t + Th0)^{a1/2}\right)$$

```
Solve[k1[0] == xx10 && k2[0] == xx20, {c1, c2}]
```

$$\left\{\left\{c1 \to -\frac{-a1\,xx10 + 2\,Th0\,xx20}{(4 + a1)\,Th0^2},\ c2 \to \frac{2\,Th0^{a1/2}\,(2\,xx10 + Th0\,xx20)}{4 + a1}\right\}\right\}$$

```
up = FullSimplify[a1 * k1[t] / (Th0 - t)^2 + 1/2 (-2 + a1) * k2[t] / (Th0 - t) /.
   {c1 → - (-a1 xx10 + 2 Th0 xx20)/((4 + a1) Th0^2), c2 → (2 Th0^(a1/2) (2 xx10 + Th0 xx20))/(4 + a1)}]
```

$$\frac{1}{2\,(4+a1)}\left(\frac{4\,a1\,xx10-8\,Th0\,xx20}{Th0^2}+a1\,(2+a1)\,Th0^{a1/2}\,(-t+Th0)^{-2-\frac{a1}{2}}\,(2\,xx10+Th0\,xx20)\right)$$

```
Reduce[-1 - a1/2 > 1, a1]
```

$a1 < -4$

```
Solve[4 f11 + 2 a1 f12 == 0 && f11 + (3 + a2) f12 + a1 f22 == 0 && f12 + (1 + a2) f22 == 0 /.
  a2 -> 1/2 (-2 + a1), {f12, f22}]
FF = F /. {f12 → - (2 f11)/a1, f22 → (4 f11)/a1^2}
Ff1 = FF /. {f11 → 1}
Det[FF]
Ffa = Ff1 - Ff1.H - H.Ff1
Det[Ffa]
```

$$\left\{\left\{f12\to-\frac{2\,f11}{a1},\ f22\to\frac{4\,f11}{a1^2}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{f11,\ -\frac{2\,f11}{a1}\right\},\ \left\{-\frac{2\,f11}{a1},\ \frac{4\,f11}{a1^2}\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{1,\ -\frac{2}{a1}\right\},\ \left\{-\frac{2}{a1},\ \frac{4}{a1^2}\right\}\right\}$$

0

$$\left\{\left\{4,\ -\frac{6}{a1}\right\},\ \left\{-\frac{6}{a1},\ \frac{8}{a1^2}\right\}\right\}$$

$$-\frac{4}{a1^2}$$

```
a = {a1, 1/2 (-2 + a1)};
y = {x1, x2 * θ};
```

```
a0 = 1/300;
P = Collect[Simplify[2 * a0 * θ^4 - Ff1.y.y], θ]
x10 = -2;
x20 = -1;
PP = P /. {x1 → x10, x2 → x20} /. f11 → 2
aa = -6;
aa2 = -4;
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa, " a2=", aa2 /. a1 → aa, " θ0=", θ0];
sol = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == a1 * x1[t]/(θ0 - t)^2 + (1/2 (-2 + a1) * x2[t])/(θ0 - t),
    x1[0] == x10, x2[0] == x20} /. a1 → aa, {x1, x2}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2] /. sol];
```

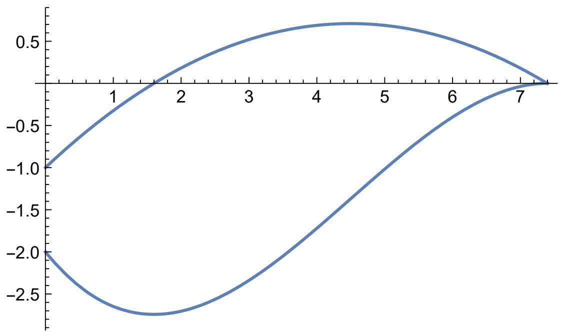
$$-x1^2 + \frac{4\,x1\,x2\,\theta}{a1} - \frac{4\,x2^2\,\theta^2}{a1^2} + \frac{\theta^4}{150}$$

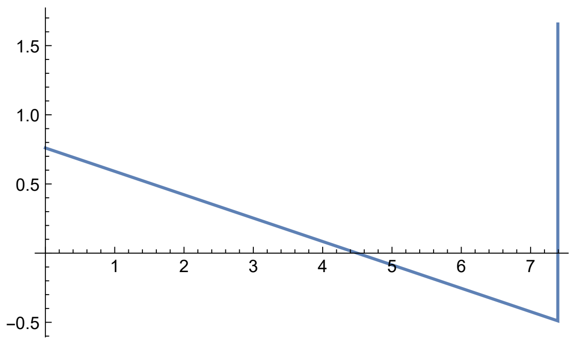
$$-4 + \frac{8\,\theta}{a1} - \frac{4\,\theta^2}{a1^2} + \frac{\theta^4}{150}$$

a1=-6 a2=-4 θ0=7.39489

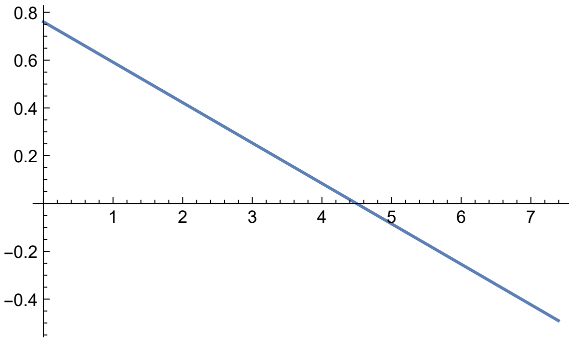
$\{1.44479 \times 10^{-13}\}$

```
Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]
Plot[a1 * x1[t]/(θ0 - t)^2 + (1/2 (-2 + a1) * x2[t])/(θ0 - t) /. a2 → aa2 /. a1 → aa /. sol, {t, 0, θ0}]
```

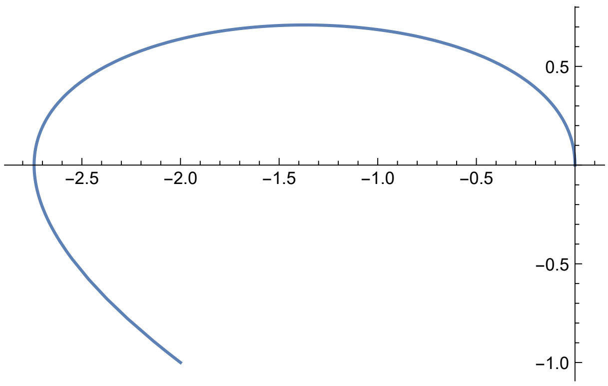




```
Plot[up /. {a1 → aa , xx10 → x10, xx20 → x20, Th0 -> θ0} /. sol, {t, 0, θ0}]
```



```
ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]
```



```
a0 = 1/40;
P = Collect[Simplify[2 * a0 * θ^4 - Ff1.y.y], θ]
x10 = 1;
x20 = -0.5;
PP = P /. {x1 → x10, x2 → x20} /. f11 → 2
aa = -8;
aa2 = -5;
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa, " a2=", aa2 /. a1 → aa, " θ0=", θ0];
sol =
  NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == (a1 * x1[t])/(θ0 - t)^2 + (1/2 (-2 + a1) * x2[t])/(θ0 - t), x1[0] == x10,
      x2[0] == x20} /. a2 → aa2 /. a1 → aa, {x1, x2}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2] /. sol];
```

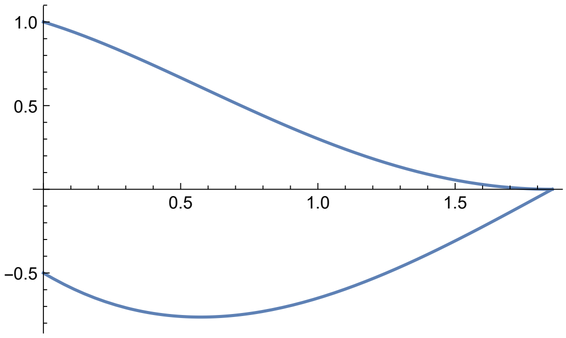
$$-x1^2 + \frac{4\,x1\,x2\,\theta}{a1} - \frac{4\,x2^2\,\theta^2}{a1^2} + \frac{\theta^4}{20}$$

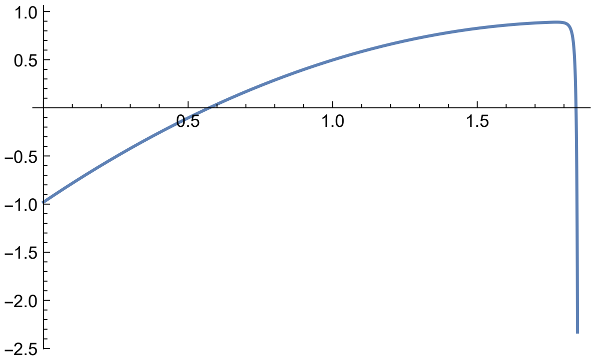
$$-1 - \frac{2.\,\theta}{a1} - \frac{1.\,\theta^2}{a1^2} + \frac{\theta^4}{20}$$

a1=-8 a2=-5 θ0=1.85363

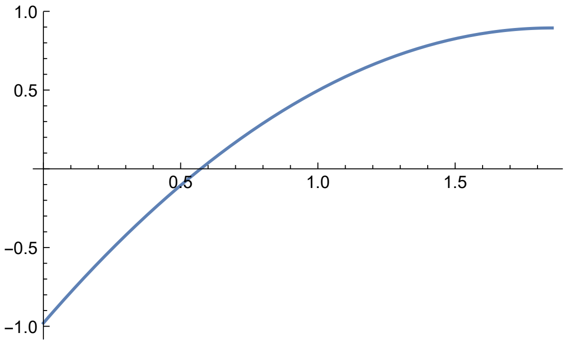
{0.000023181}

```
Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]
Plot[a1 * x1[t]/(θ0 - t)^2 + (1/2 (-2 + a1) * x2[t])/(θ0 - t) /. a1 → aa /. sol, {t, 0, θ0}]
```

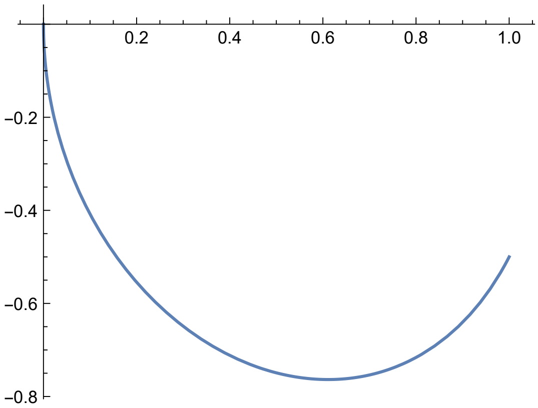





```
Plot[up /. {a1 → aa , xx10 → x10, xx20 → x20, Th0 -> θ0} /. sol, {t, 0, θ0}]
```




```
ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]
```



In[224]:= `Solve[λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /. a2 → -3, λ]`

Out[224]= $\{\{\lambda \to 2 - \sqrt{4 + a1}\}, \{\lambda \to 2 + \sqrt{4 + a1}\}\}$

In[225]:= `Clear[t1, t2]`

In[226]:=
```
λ1 = 2 - Sqrt[4 + a1];
λ2 = 2 + Sqrt[4 + a1];
t1[t_] = Simplify[c1 (Th0 - t)^λ1 + c2 (Th0 - t)^λ2]
t2[t_] = Simplify[D[t1[t], t]]
```

Out[228]= $c1\ (-t + Th0)^{2-\sqrt{4+a1}} + c2\ (-t + Th0)^{2+\sqrt{4+a1}}$

Out[229]= $-\left(2 - \sqrt{4 + a1}\right) c1\ (-t + Th0)^{1-\sqrt{4+a1}} - \left(2 + \sqrt{4 + a1}\right) c2\ (-t + Th0)^{1+\sqrt{4+a1}}$

In[230]:=

In[231]:= `Solve[t1[0] == xx10 && t2[0] == xx20, {c1, c2}]`

Out[231]= $$\left\{\left\{c1 \to \frac{Th0^{-2+\sqrt{4+a1}} \left(2\ xx10 + \sqrt{4 + a1}\ xx10 + Th0\ xx20\right)}{2 \sqrt{4 + a1}},\ c2 \to \frac{Th0^{-2-\sqrt{4+a1}} \left(-2\ xx10 + \sqrt{4 + a1}\ xx10 - Th0\ xx20\right)}{2 \sqrt{4 + a1}}\right\}\right\}$$

In[232]:= `Reduce[Re[1 + Sqrt[4 + a1]] >= 1 && Re[1 - Sqrt[4 + a1]] >= 1, a1]`

Out[232]= `Re[a1] ≤ -4 && Im[a1] == 0`

In[234]:=
```
Solve[
 4 f11 + 2 a1 f12 == 0 && f11 + (3 + a2) f12 + a1 f22 == 0 && f12 + (1 + a2) f22 == 0 /. a2 → -3,
 {f12, f22}]
```

Out[234]= $\left\{\left\{f12 \to -\frac{2\ f11}{a1},\ f22 \to -\frac{f11}{a1}\right\}\right\}$

In[235]:=
```
FF2 = F /. {f12 → -2 f11/a1, f22 → -f11/a1}
Ff2 = F /. {f12 → -2 f11/a1, f22 → -f11/a1} /. f11 → 1
Det[Ff2]
```

Out[235]= $\left\{\left\{f11, -\frac{2\ f11}{a1}\right\}, \left\{-\frac{2\ f11}{a1}, -\frac{f11}{a1}\right\}\right\}$

Out[236]= $\left\{\left\{1, -\frac{2}{a1}\right\}, \left\{-\frac{2}{a1}, -\frac{1}{a1}\right\}\right\}$

Out[237]= $-\frac{4}{a1^2} - \frac{1}{a1}$

In[238]:= `Fa2 = Ff2 - Ff2.H - H.Ff2`

Out[238]= $\left\{\left\{4, -\frac{6}{a1}\right\}, \left\{-\frac{6}{a1}, -\frac{2}{a1}\right\}\right\}$

In[239]:= `Det[Fa2]`

Out[239]= $-\frac{36}{a1^2}-\frac{8}{a1}$

In[240]:= `Reduce[Det[Fa2] >= 0, a1]`

Out[240]= $a1 \leq -\frac{9}{2}$

In[241]:= $x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$;

```
Simplify[Transpose[x].Fa2.x]
```

Out[242]= $\left\{\left\{\frac{4\ a1\ x1^2-2\ x2\ (6\ x1+x2)}{a1}\right\}\right\}$

In[243]:=
```
y = {x1, x2 * θ};
P = Collect[Simplify[2 * a0 * θ^4 - Ff2.y.y], θ]
x10 = -1/3;
x20 = 1;
PP = P /. {x1 → x10, x2 → x20}
aa = -4.5;
NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals]
```

Out[244]= $-x1^2+\frac{4\ x1\ x2\ \theta}{a1}+\frac{x2^2\ \theta^2}{a1}+\frac{(4+a1)\ \theta^4}{a1^2\ (3+a1)}$

Out[247]= $-\frac{1}{9}-\frac{4\ \theta}{3\ a1}+\frac{\theta^2}{a1}+\frac{(4+a1)\ \theta^4}{a1^2\ (3+a1)}$

Out[249]= {{θ → -4.25481}, {θ → 2.82337}}

In[251]:=
```
y = {x1, x2 * θ};
P = Collect[Simplify[2 * a0 * θ^4 - Ff2.y.y], θ]
x10 = 1.5;
x20 = -1;
PP = P /. {x1 → x10, x2 → x20}
aa = -5.5;
θ0 = (θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[2, 1]]);
Print["a1=", aa, " a2=", aa2 /. a1 → aa, " θ0=", θ0];
```

$\texttt{sol = NDSolve}\left[\left\{x1'[t] == x2[t],\ x2'[t] == \frac{a1 * x1[t]}{(\theta0 - t)^2} + \frac{-3 * x2[t]}{\theta0 - t},\right.\right.$

$\quad\left.\left. x1[0] == x10,\ x2[0] == x20\right\} /.\ a1 \to aa,\ \{x1, x2\},\ \{t, 0, \theta0\}\right];$

$\texttt{Print}\left[\sqrt{x1[\theta0]\text{^}2 + x2[\theta0]\text{^}2}\ /.\ sol\right];$

Out[252]= $-x1^2+\frac{4\ x1\ x2\ \theta}{a1}+\frac{x2^2\ \theta^2}{a1}+\frac{(4+a1)\ \theta^4}{a1^2\ (3+a1)}$

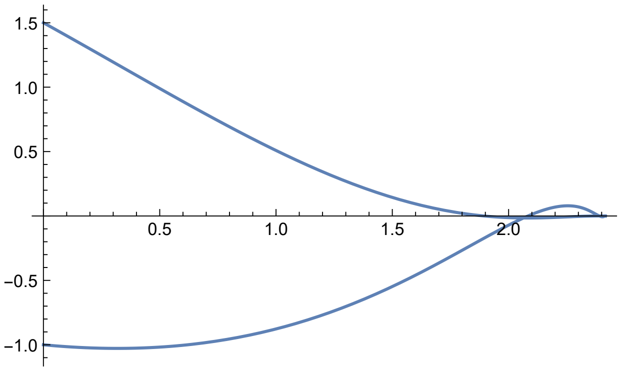
Out[255]= $-2.25-\frac{6.\ \theta}{a1}+\frac{\theta^2}{a1}+\frac{(4+a1)\ \theta^4}{a1^2\ (3+a1)}$

a1=-5.5 a2=aa2 θ0=2.41589

$\{3.27804\times 10^{-8}\}$

In[261]:= `Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]`

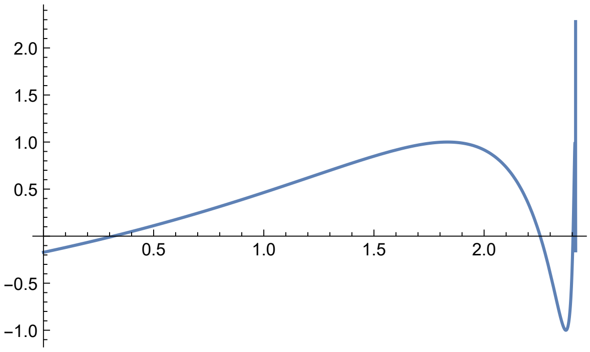
Out[261]=



In[262]:=

$$\texttt{Plot}\left[\frac{\texttt{a1} * \texttt{x1}[\texttt{t}]}{(\theta 0 - \texttt{t})^2} + \frac{-3 * \texttt{x2}[\texttt{t}]}{\theta 0 - \texttt{t}} \;\texttt{/. a1} \rightarrow \texttt{aa /. sol, \{t, 0, }\theta 0\texttt{\}}\right]$$

Out[262]=



In[263]:=

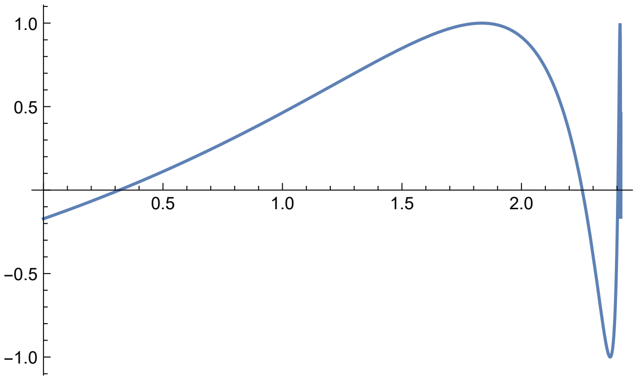
$$\texttt{Plot}\Big[\texttt{a1} * \texttt{t1}[\texttt{t}] \,/\, (\texttt{Th0} - \texttt{t})\,\hat{}\,2 - 3 * \texttt{t2}[\texttt{t}] \,/\, (\texttt{Th0} - \texttt{t}) \;\texttt{/.}$$

$$\left\{\texttt{c1} \rightarrow \frac{\texttt{Th0}^{-2+\sqrt{4+\texttt{a1}}}\left(2\,\texttt{xx10} + \sqrt{4+\texttt{a1}}\,\texttt{xx10} + \texttt{Th0}\,\texttt{xx20}\right)}{2\sqrt{4+\texttt{a1}}},\right.$$

$$\left.\texttt{c2} \rightarrow \frac{\texttt{Th0}^{-2-\sqrt{4+\texttt{a1}}}\left(-2\,\texttt{xx10} + \sqrt{4+\texttt{a1}}\,\texttt{xx10} - \texttt{Th0}\,\texttt{xx20}\right)}{2\sqrt{4+\texttt{a1}}}\right\} \texttt{ /. a1} \rightarrow \texttt{aa /.}$$

$$\{\texttt{xx10} \rightarrow \texttt{x10},\ \texttt{xx20} \rightarrow \texttt{x20},\ \texttt{Th0 -> }\theta 0\} \texttt{ /. sol, \{t, 0, }\theta 0\texttt{\}}\Big]$$

Out[263]=



not unique Th

In[265]:= a0 = Simplify$\left[\frac{1}{2\,\text{Transpose[a].Inverse[Ff2].a}}\right]$[[1, 1]] /. a1 → -4.01

Out[265]= 0.000307865

In[266]:= a = $\begin{pmatrix} a1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

a0 = Simplify$\left[\frac{1}{2\,\text{Transpose[a].Inverse[Ff2].a}}\right]$[[1, 1]]

```
y = {x1, x2 * θ};
P = Collect[Simplify[2 * a0 * θ^4 - Ff2.y.y], θ]
x10 = 0.5;
x20 = -0.5;
PP = P /. {x1 → x10, x2 → x20}
aa = -4.01;
```

Out[267]= $\frac{4 + a1}{2\, a1^2\, (3 + a1)}$

Out[269]= $-x1^2 + \frac{4\, x1\, x2\, \theta}{a1} + \frac{x2^2\, \theta^2}{a1} + \frac{(4 + a1)\, \theta^4}{a1^2\, (3 + a1)}$

Out[272]= $-0.25 - \frac{1.\, \theta}{a1} + \frac{0.25\, \theta^2}{a1} + \frac{(4 + a1)\, \theta^4}{a1^2\, (3 + a1)}$

In[274]:= NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals]

Out[274]= {{θ → -11.7723}, {θ → 1.72258}, {θ → 2.7386}, {θ → 7.31107}}

In[276]:=

In[277]:= θ0 = (θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[2, 1]]);

Print["a1=", aa, " a2=", -3, " θ0=", θ0];

sol1 = NDSolve$\left[\left\{x1'[t] == x2[t],\ x2'[t] == \frac{a1 * x1[t]}{(\theta0 - t)^2} + \frac{-3 * x2[t]}{\theta0 - t},\right.\right.$

$\left.\left.x1[0] == x10,\ x2[0] == x20\right\} /.\ a1 \to aa,\ \{x1, x2\},\ \{t, 0, \theta0\}\right]$;

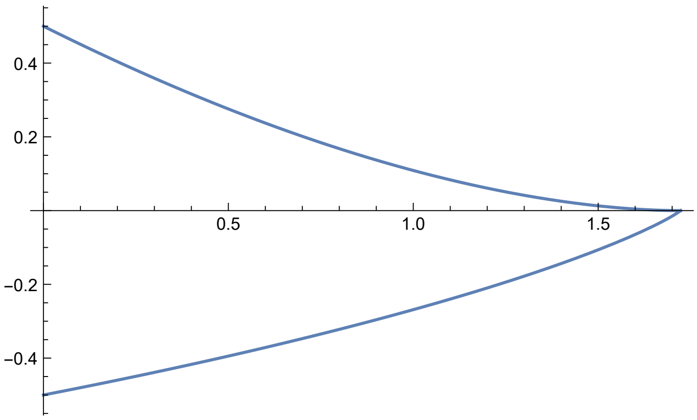
Print$\left[\sqrt{x1[\theta0]^2 + x2[\theta0]^2}\ /.\ sol1\right]$

a1=-4.01 a2=-3 θ0=1.72258

$\{6.22305 \times 10^{-8}\}$

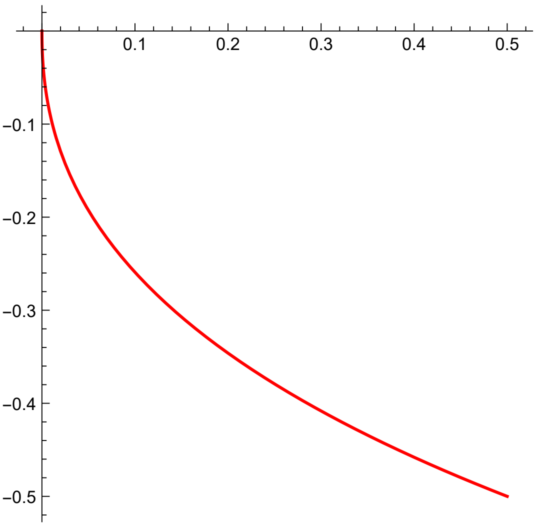
In[281]:= ps1 = Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol1, {t, 0, θ0}]

Out[281]=



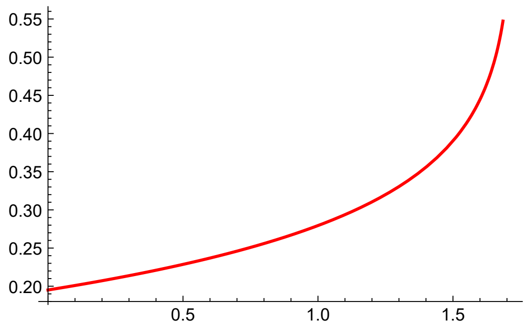
In[282]:=
```
pp1 = ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol1, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red]
```

Out[282]=



In[283]:=
```
pu1 = Plot[(a1 * x1[t])/(θ0 - t)^2 + (-3 * x2[t])/(θ0 - t) /. a1 → aa /. sol1, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red]
```

Out[283]=



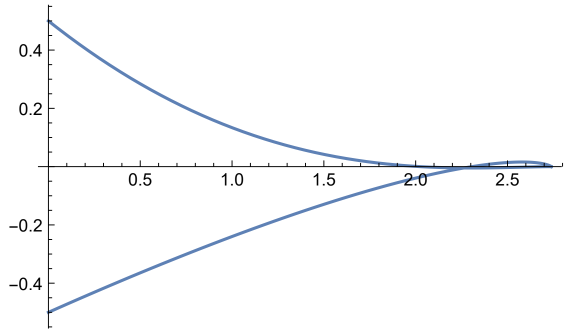
In[284]:=
```
θ0 = (θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[3, 1]]);
Print["a1=", aa, " a2=", -3, " θ0=", θ0];
sol2 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == (a1 * x1[t])/(θ0 - t)^2 + (-3 * x2[t])/(θ0 - t),
      x1[0] == x10, x2[0] == x20} /. a1 → aa, {x1, x2}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2] /. sol2]
```

```
a1=-4.01 a2=-3 θ0=2.7386
```

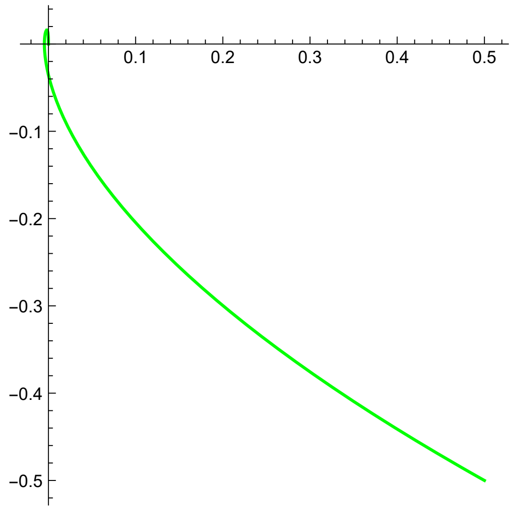
$\{1.28928 \times 10^{-7}\}$

In[288]:=
```
ps2 = Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol2, {t, 0, θ0}]
```

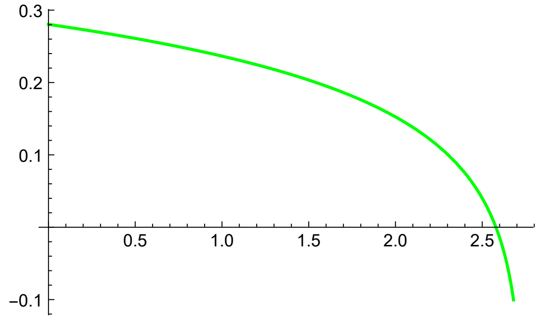
Out[288]=



In[289]:=
```
pp2 = ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol2, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green]
```

Out[289]=


In[290]:=
$$pu2 = Plot\left[\frac{a1 * x1[t]}{(\theta 0 - t)^2} + \frac{-3 * x2[t]}{\theta 0 - t} \ /.\ a1 \to aa\ /.\ sol2,\ \{t, 0, \theta 0\},\ PlotStyle \to Green\right]$$

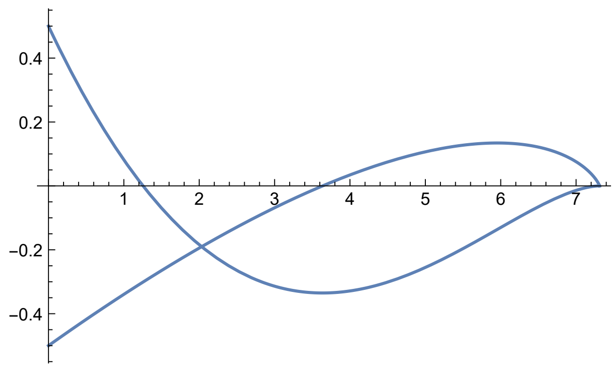
Out[290]=


In[291]:=
```
θ0 = (θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[4, 1]]);
Print["a1=", aa, " a2=", -3, " θ0=", θ0];
```
$$sol3 = NDSolve\left[\left\{x1'[t] == x2[t],\ x2'[t] == \frac{a1 * x1[t]}{(\theta 0 - t)^2} + \frac{-3 * x2[t]}{\theta 0 - t},\ x1[0] == x10,\ x2[0] == x20\right\} /.\ a1 \to aa,\ \{x1, x2\},\ \{t, 0, \theta 0\}\right];$$
$$Print\left[\sqrt{x1[\theta 0]\verb|^|2 + x2[\theta 0]\verb|^|2}\ /.\ sol3\right]$$

a1=-4.01 a2=-3 θ0=7.31107

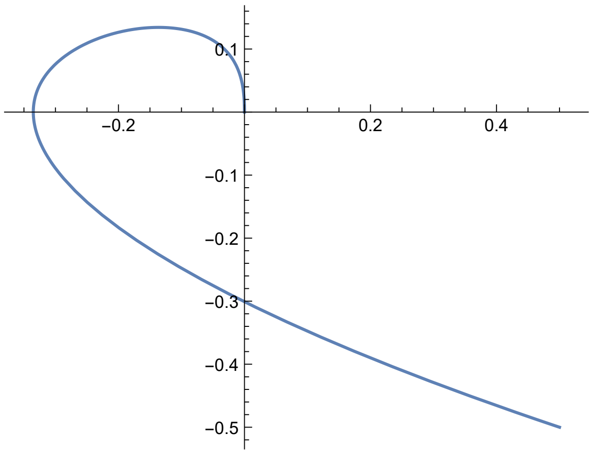
$\{7.9689 \times 10^{-8}\}$

In[295]:=
```
ps3 = Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol3, {t, 0, θ0}]
```

Out[295]=


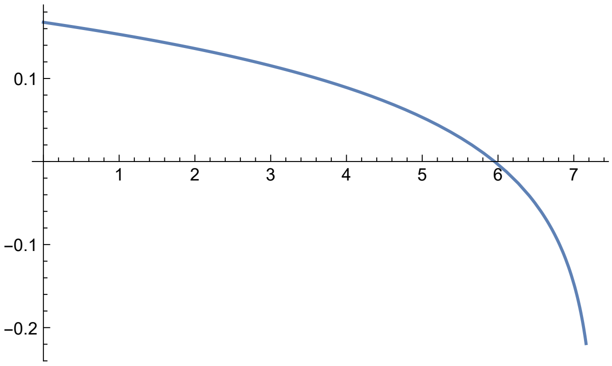
In[296]:= `pp3 = ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol3, {t, 0, θ0}]`

Out[296]=



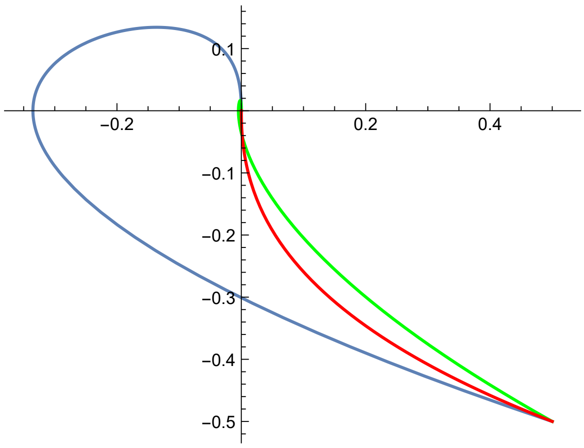
In[297]:= `pu3 = Plot[` $\frac{a1 * x1[t]}{(\theta 0 - t)^2} + \frac{-3 * x2[t]}{\theta 0 - t}$ `/. a1 → aa /. sol3, {t, 0, θ0}]`

Out[297]=



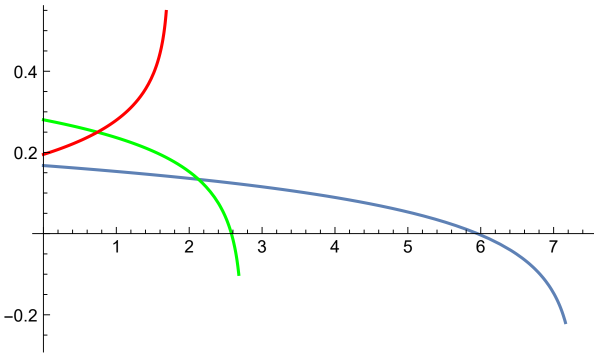
In[298]:= `Show[pp3, pp2, pp1]`

Out[298]=



In[299]:= `Show[pu3, pu2, pu1, PlotRange → {{0, 7.4}, {-0.25, 0.52}}]`

Out[299]=



In[301]:= $a = \begin{pmatrix} a1 \\ -3 \end{pmatrix};$

$$a0 = \text{Simplify}\left[\frac{1}{2\,\text{Transpose}[a].\text{Inverse}[Ff2].a}\right][[1, 1]]$$

y = {x1, x2 * θ};

$$P = \text{Collect}\left[\text{Simplify}\left[2 * \frac{a0}{15.9608938350297385} * \theta\hat{}4 - Ff2.y.y\right], \theta\right]$$

x10 = 0.5;

x20 = -0.5;

PP = P /. {x1 → x10, x2 → x20}

aa = -4.01;

Out[302]= $$\frac{4 + a1}{2\, a1^2\, (3 + a1)}$$

Out[304]= $$-x1^2 + \frac{4\, x1\, x2\, \theta}{a1} + \frac{x2^2\, \theta^2}{a1} + \frac{0.062653132734037560\, (4 + a1)\, \theta^4}{a1^2\, (3 + a1)}$$

Out[307]= $$-0.25 - \frac{1.\,\theta}{a1} + \frac{0.25\,\theta^2}{a1} + \frac{0.062653132734037560\, (4 + a1)\, \theta^4}{a1^2\, (3 + a1)}$$

In[309]:= a0 /. a1 → aa

Out[309]= 0.000307865

In[310]:= $$\frac{a0}{15.9608938350297385} \;/.\; a1 \to aa$$

Out[310]= 0.0000192887

In[311]:= NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals]

Out[311]= {{θ → -42.1099}, {θ → 2.01005}, {θ → 2.01005}, {θ → 38.0898}}

In[312]:= θ0 = (θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[2, 1]]);

Print["a1=", aa, " a2=", -3, " θ0=", θ0];

$$\text{sol21} = \text{NDSolve}\left[\left\{x1'[t] == x2[t],\ x2'[t] == \frac{a1 * x1[t]}{(\theta0 - t)^2} + \frac{-3 * x2[t]}{\theta0 - t},\right.\right.$$
$$\left.\left. x1[0] == x10,\ x2[0] == x20\right\} /.\ a1 \to aa,\ \{x1, x2\},\ \{t, 0, \theta0\}\right];$$

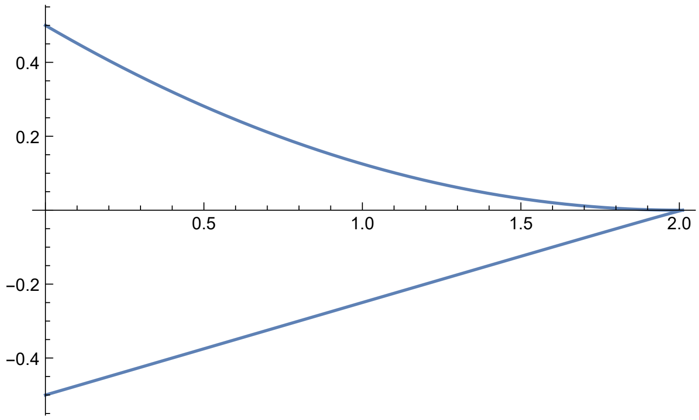
$$\text{Print}\left[\sqrt{x1[\theta0]\hat{}2 + x2[\theta0]\hat{}2} \;/.\; \text{sol21}\right]$$

```
a1=-4.01 a2=-3 θ0=2.01005
```

$\{1.03782\times10^{-7}\}$

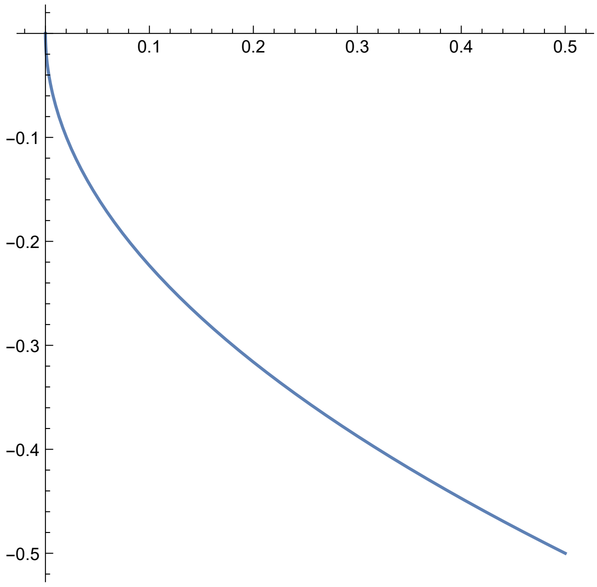
In[316]:= `ps21 = Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol21, {t, 0, θ0}]`

Out[316]=



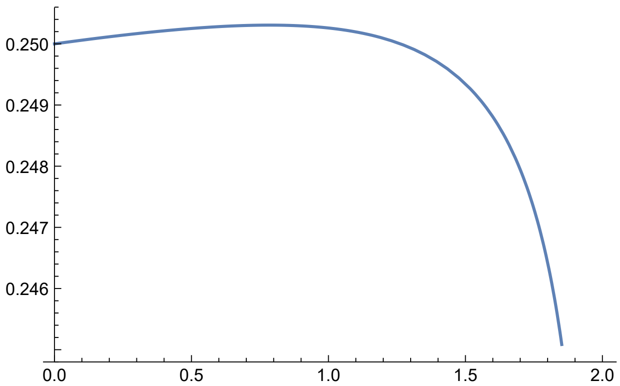
In[317]:= `pp21 = ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol21, {t, 0, θ0}]`

Out[317]=



In[318]:= $\texttt{pu21 = Plot}\left[\frac{\texttt{a1}*\texttt{x1[t]}}{(\theta0-\texttt{t})^2}+\frac{-3*\texttt{x2[t]}}{\theta0-\texttt{t}}\ \texttt{/. a1}\to\texttt{aa /. sol21, \{t, 0, }\theta0\texttt{\}}\right]$

Out[318]=



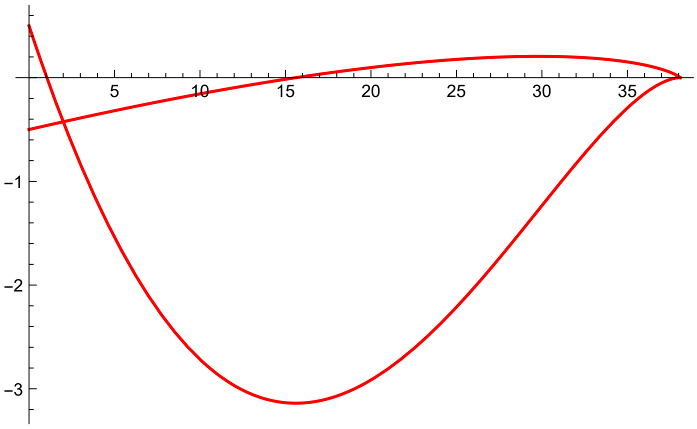
In[319]:=
```
θ0 = (θ /. NSolve[PP == 0 /. a1 → aa, θ, Reals][[4, 1]]);
Print["a1=", aa, " a2=", -3, " θ0=", θ0];
sol22 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == a1*x1[t]/(θ0 - t)^2 + -3*x2[t]/(θ0 - t),
    x1[0] == x10, x2[0] == x20} /. a1 → aa, {x1, x2}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2] /. sol22]
```

a1=-4.01 a2=-3 θ0=38.0898

$\{1.21734\times 10^{-7}\}$

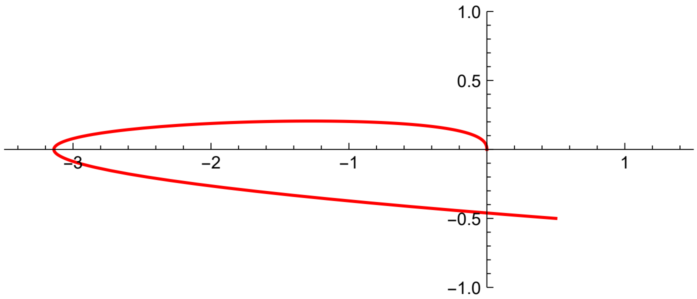
In[323]:=
```
ps22 = Plot[{x1[t], x2[t]} /. sol22, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red]
```

Out[323]=



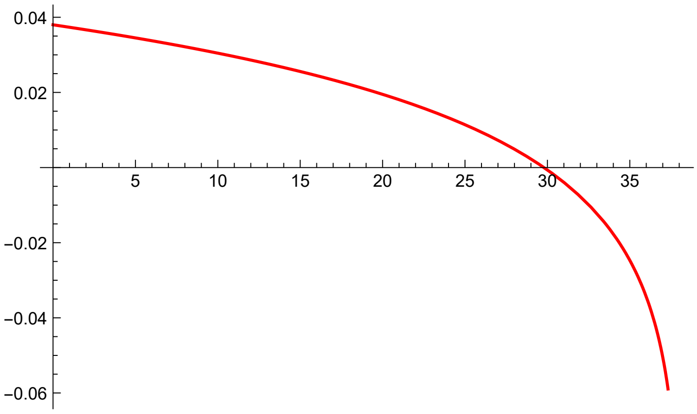
In[324]:=
```
pp22 = ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol22,
  {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red, PlotRange → {{-3.5, 1.5}, {-1, 1}}]
```

Out[324]=



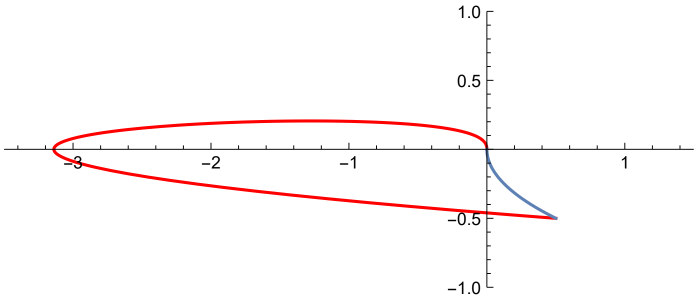
In[325]:=
```
pu22 = Plot[a1*x1[t]/(θ0 - t)^2 + -3*x2[t]/(θ0 - t) /. a1 → aa /. sol22, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red]
```

Out[325]=



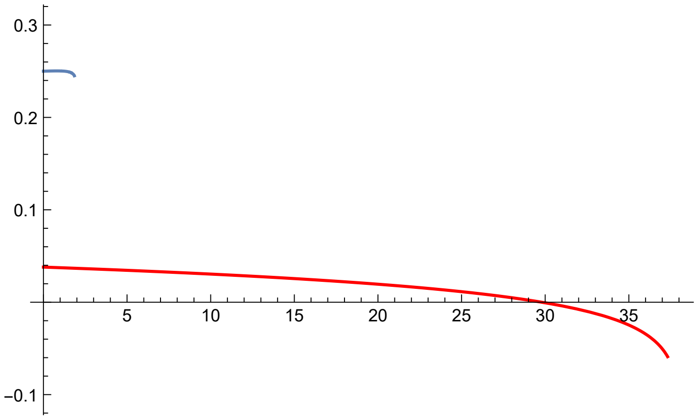
In[326]:= **Show[pp22, pp21]**

Out[326]=



In[327]:= **Show[pu22, pu21, PlotRange → {{0, θ0}, {-0.1, 0.3}}]**

Out[327]=



окремий випадок a1 = -4

```
Solve[λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /. a2 → 1/2 (-2 + a1) /. a1 → -4, λ]
```

{{λ → 2}, {λ → 2}}

```
tkr1[t_] = Simplify[c1 (Th0 - t)^2 + c2 Log[Th0 - t] (Th0 - t)^2]
tkr2[t_] = Simplify[D[tkr1[t], t]]
```

$(t - Th0)^2\ (c1 + c2\ Log[-t + Th0])$

(t - Th0) (2 c1 + c2 + 2 c2 Log[-t + Th0])

```
FullSimplify[a1 * tkr1[t] / (Th0 - t)^2 + 1/2 (-2 + a1) * tkr2[t] / (Th0 - t)] /. a1 → -4
```

2 c1 + 3 c2 + 2 c2 Log[-t + Th0]

Додаток Б

Розрахунки у тривимірному випадку

У цьому додатку наведено код програми Wolfram Mathematica, який використовувався для обчислення матриць, розв'язку систем рівнянь, знаходження коренів характеристичного многочлена, розв'язку нерівностей, побудови траєкторій та побудови графіків керування у тривимірному випадку. Усі ці розрахунки подано на наступних сторінках.

```
In[2248]:= Clear[a1, a2, a3]

In[2249]:= F = {{f11, f12, f13}, {f12, f22, f23}, {f13, f23, f33}};
           A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {a1, a2, a3 }};
           A1 = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {a1, a2, a3 }};
           H = {{-5/2, 0, 0}, {0, -3/2, 0}, {0, 0, -1/2}};
           Fa = F - F.H - H.F

Out[2253]= {{6 f11, 5 f12, 4 f13}, {5 f12, 4 f22, 3 f23}, {4 f13, 3 f23, 2 f33}}

In[2254]:= Simplify[F.A1 + Transpose[F.A1] + Fa]

Out[2254]= {{6 f11 + 2 a1 f13, f11 + 5 f12 + a2 f13 + a1 f23, f12 + (4 + a3) f13 + a1 f33},
            {f11 + 5 f12 + a2 f13 + a1 f23, 2 (f12 + 2 f22 + a2 f23), f13 + f22 + 3 f23 + a3 f23 + a2 f33},
            {f12 + (4 + a3) f13 + a1 f33, f13 + f22 + 3 f23 + a3 f23 + a2 f33, 2 (f23 + f33 + a3 f33)}}
```

In[2255]:= $m = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2\,a1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & a2 & 0 & a1 & 0 \\ 0 & 1 & 4+a3 & 0 & 0 & a1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & a2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3+a3 & a2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+a3 \end{pmatrix};$

```
In[2256]:= Det[m]

Out[2256]= 720 + 108 a1 - 2 a1^2 - 396 a2 + 18 a2^2 + 1140 a3 + 58 a1 a3 -
            258 a2 a3 - 2 a1 a2 a3 + 6 a2^2 a3 + 480 a3^2 + 10 a1 a3^2 - 42 a2 a3^2 + 60 a3^3

In[2257]:= Solve[Det[m] == 0, a1]

Out[2257]= {{a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3)}, {a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3)}}

In[2258]:= Solve[3 (-2 + a2 - 2 a3) == -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3), {a3}]

Out[2258]= {{a3 → -6}, {a3 → 1/5 (-11 + a2)}}

In[2259]:= Simplify[Solve[
             {6 f11 + 2 a1 f13 == 0, f11 + 5 f12 + a2 f13 + a1 f23 == 0, f12 + (4 + a3) f13 + a1 f33 == 0,
               f12 + 2 f22 + a2 f23 == 0 , f13 + f22 + 3 f23 + a3 f23 + a2 f33 == 0,
               f23 + f33 + a3 f33 == 0} /. a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3) /.
             a3 → 1/5 (-11 + a2), {f11, f12, f13, f22, f23}]]
```

Out[2259]= $\left\{\left\{f11 \to \frac{9}{25}(4+a2)^2\,f33,\ f12 \to \frac{3}{25}\left(-24-2\,a2+a2^2\right)f33,\ f13 \to -\frac{3}{5}(4+a2)\,f33,\ f22 \to \frac{1}{25}(-6+a2)^2\,f33,\ f23 \to -\frac{1}{5}(-6+a2)\,f33\right\}\right\}$

In[2260]:= F /. {f11 → $\frac{9}{25}$ (4 + a2)^2 f33, f12 → $\frac{3}{25}$ (-24 - 2 a2 + a2^2) f33,
f13 → -$\frac{3}{5}$ (4 + a2) f33, f22 → $\frac{1}{25}$ (-6 + a2)^2 f33, f23 → -$\frac{1}{5}$ (-6 + a2) f33}

Out[2260]= {{$\frac{9}{25}$ (4 + a2)^2 f33, $\frac{3}{25}$ (-24 - 2 a2 + a2^2) f33, -$\frac{3}{5}$ (4 + a2) f33},
{$\frac{3}{25}$ (-24 - 2 a2 + a2^2) f33, $\frac{1}{25}$ (-6 + a2)^2 f33, -$\frac{1}{5}$ (-6 + a2) f33},
{-$\frac{3}{5}$ (4 + a2) f33, -$\frac{1}{5}$ (-6 + a2) f33, f33}}

In[2261]:= Det[%]

Out[2261]= 0

Det F ne 0

In[2262]:= Collect[Det[{{3, 1, 0}, {0, 2, 1}, {a1, a2, a3 + 1}} -
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}} λ], λ]

Out[2262]= 6 + a1 - 3 a2 + 6 a3 + (-11 + a2 - 5 a3) λ + (6 + a3) λ^2 - λ^3

In[2263]:= Solve[6 + a3 == 0 && 6 + a1 - 3 a2 + 6 a3 == 0, {a1, a3}]

Out[2263]= {{a1 → 3 (10 + a2), a3 → -6}}

In[2264]:= a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3) /. a3 → -6

Out[2264]= a1 → 3 (10 + a2)

из Θ'[t]=-1

In[2265]:= Simplify[Solve[F.A1 + Transpose[F.A1] + Fa == 0 /. a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3) /. a3 → -6,
{f11, f12, f13, f22, f23, f33}]]

Out[2265]= {{f11 → -(10 + a2) f13,
f12 → 2 f13 - $\frac{3}{5}$ (10 + a2) f23, f22 → -f13 + 3 f23 - $\frac{\text{a2 f23}}{5}$, f33 → $\frac{\text{f23}}{5}$}}

In[2266]:= Simplify[Det[F /. {f11 → -(10 + a2) f13,
f12 → 2 f13 - $\frac{3}{5}$ (10 + a2) f23, f22 → -f13 + 3 f23 - $\frac{\text{a2 f23}}{5}$, f33 → $\frac{\text{f23}}{5}$}]]

Out[2266]= $\frac{1}{125}$ (5 f13 - 9 f23) (5 f13 + (10 + a2) f23)^2

пример стр 190-191 при {f23→60,f13→120,a2→-30}

In[2267]:= F /. {f11 → -(10 + a2) f13,
f12 → 2 f13 - $\frac{3}{5}$ (10 + a2) f23, f22 → -f13 + 3 f23 - $\frac{\text{a2 f23}}{5}$, f33 → $\frac{\text{f23}}{5}$}

Out[2267]= {{(-10 - a2) f13, 2 f13 - $\frac{3}{5}$ (10 + a2) f23, f13},
{2 f13 - $\frac{3}{5}$ (10 + a2) f23, -f13 + 3 f23 - $\frac{\text{a2 f23}}{5}$, f23}, {f13, f23, $\frac{\text{f23}}{5}$}}

In[2268]:= $F\ /.\ \{f11 \to -(10+a2)\ f13,\ f12 \to 2\ f13 - \frac{3}{5}(10+a2)\ f23,$
$f22 \to -f13 + 3\ f23 - \frac{a2\ f23}{5},\ f33 \to \frac{f23}{5}\}\ /.\ \{f23 \to 60,\ f13 \to 120,\ a2 \to -30\}$

Out[2268]= {{2400, 960, 120}, {960, 420, 60}, {120, 60, 12}}

In[2269]:= **Det[%]**

Out[2269]= 172 800

In[2270]:= $a1 \to 3\ (-2 + a2 - 2\ a3)\ /.\ a3 \to -6\ /.\ a2 \to -25$

Out[2270]= $a1 \to -45$

In[2271]:= $F\ /.\ \{f11 \to -(10+a2)\ f13,\ f12 \to 2\ f13 - \frac{3}{5}(10+a2)\ f23,$
$f22 \to -f13 + 3\ f23 - \frac{a2\ f23}{5},\ f33 \to \frac{f23}{5}\}\ /.\ \{a2 \to -25\}$

Out[2271]= $\{\{15\ f13,\ 2\ f13 + 9\ f23,\ f13\},\ \{2\ f13 + 9\ f23,\ -f13 + 8\ f23,\ f23\},\ \{f13,\ f23,\ \frac{f23}{5}\}\}$

In[2272]:= **Det[%]**

Out[2272]= $f13^3 - \frac{39\ f13^2\ f23}{5} + \frac{99\ f13\ f23^2}{5} - \frac{81\ f23^3}{5}$

In[2273]:= $Det[Fa\ /.\ \{f11 \to -(10+a2)\ f13,\ f12 \to 2\ f13 - \frac{3}{5}(10+a2)\ f23,$
$f22 \to -f13 + 3\ f23 - \frac{a2\ f23}{5},\ f33 \to \frac{f23}{5}\}\ /.\ \{a2 \to -25\}]$

Out[2273]= $64\ f13^3 - 456\ f13^2\ f23 + 1062\ f13\ f23^2 - 810\ f23^3$

In[2274]:= $64\ f13^3 - 456\ f13^2\ f23 + 1062\ f13\ f23^2 - 810\ f23^3\ /.\ \{f23 \to 60,\ f13 \to 120\}$

Out[2274]= 432 000

Розглянемо {a1→3 (-2+a2-2 a3)},{a1→-(-20+a2-5 a3) (3+a3)} та покажемо що за них det F=0 а det Fa змінює знак
det F and det Fa=0

In[2275]:= $Simplify[Solve[$
$\{6\ f11 + 2\ a1\ f13 == 0,\ f11 + 5\ f12 + a2\ f13 + a1\ f23 == 0,\ f12 + (4 + a3)\ f13 + a1\ f33 == 0,$
$f12 + 2\ f22 + a2\ f23 == 0,\ f13 + f22 + 3\ f23 + a3\ f23 + a2\ f33 == 0,$
$f23 + f33 + a3\ f33 == 0\}\ /.\ a1 \to 3\ (-2 + a2 - 2\ a3),\ \{f11,\ f12,\ f13,\ f22,\ f23\}]]$

Out[2275]= $\{\{f11 \to (a2 - 2\ (1 + a3))^2\ f33,\ f12 \to (1 + a3)\ (a2 - 2\ (1 + a3))\ f33,$
$f13 \to (2 - a2 + 2\ a3)\ f33,\ f22 \to (1 + a3)^2\ f33,\ f23 \to -(1 + a3)\ f33\}\}$

```
In[2276]:= FF = Simplify[F /. {f11 → (a2 - 2 (1 + a3))^2 f33, f12 → (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33,
               f13 → (2 - a2 + 2 a3) f33, f22 → (1 + a3)^2 f33, f23 → -(1 + a3) f33}]
            Ff =
             FF /.
              {f33 →
                1}

Out[2276]= {{(a2 - 2 (1 + a3))^2 f33, (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33, (2 - a2 + 2 a3) f33},
             {(1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33, (1 + a3)^2 f33, -(1 + a3) f33},
             {(2 - a2 + 2 a3) f33, -(1 + a3) f33, f33}}

Out[2277]= {{(a2 - 2 (1 + a3))^2, (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)), 2 - a2 + 2 a3},
             {(1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)), (1 + a3)^2, -1 - a3}, {2 - a2 + 2 a3, -1 - a3, 1}}

In[2278]:= Det[FF]

Out[2278]= 0

In[2279]:= Det[{{(a2 - 2 (1 + a3))^2 f33, (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33},
              {(1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33, (1 + a3)^2 f33}}]

Out[2279]= 0

In[2280]:= FF /. {f33 → -12, a2 → -30, a3 → -6}

Out[2280]= {{-4800, -1200, -240}, {-1200, -300, -60}, {-240, -60, -12}}

In[2281]:= 3 (-2 + a2 - 2 a3) /. {f33 → -12, a2 → -30, a3 → -6}

Out[2281]= -60

In[2282]:= P = Collect[(2 * a0 * θ - FF. y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa, f33 → -14}, θ]
            NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals]
```

Out[2282]= $2016\, x1^2 + 1680\, x1\, x2\, \theta + \left(350\, x2^2 + 336\, x1\, x3\right) \theta^2 + 140\, x2\, x3\, \theta^3 + 14\, x3^2\, \theta^4 + \frac{\theta^6}{200}$

```
Out[2283]= {{θ → -72.6365}, {θ → 68.6268}}
```

```
In[2284]:= aa1 = -60;
aa = -30;
aaa = -6;
a = {a1, a2, a3} /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/5;
P = Collect[(2 * a0 * θ - FF. y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa, f33 → -2}, θ]
x10 = -1;
x20 = -2;
x30 = 5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa, ", a3=", aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol4 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
      (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
    a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol4]
```

Out[2291]= $800\, x1^2 + 400\, x1\, x2\, \theta + \left(50\, x2^2 + 80\, x1\, x3\right) \theta^2 + 20\, x2\, x3\, \theta^3 + 2\, x3^2\, \theta^4 + \frac{2\, \theta^6}{5}$

Out[2295]= $800 + 800\, \theta - 200\, \theta^2 - 200\, \theta^3 + 50\, \theta^4 + \frac{2\, \theta^6}{5}$

```
a1=-60, a2=-30, a3=-6
θ0=θ /. {}[[2, 1]]
```

$\sqrt{\left(x1[\theta \,/.\, \{\}[[2, 1]]]^2 + x2[\theta \,/.\, \{\}[[2, 1]]]^2 + x3[\theta \,/.\, \{\}[[2, 1]]]^2\right)}$ /.
NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
$x3'[t] == -\frac{60\, x1[t]}{(-t + (\theta \,/.\, \{\}[[2, 1]]))^3} - \frac{30\, x2[t]}{(-t + (\theta \,/.\, \{\}[[2, 1]]))^2} - \frac{6\, x3[t]}{-t + (\theta \,/.\, \{\}[[2, 1]])}$,
x1[0] == -1, x2[0] == -2, x3[0] == 5}, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ /. {}[[2, 1]]}]

```
In[2301]:= Fa /. {f11 → (a2 - 2 (1 + a3))^2 f33, f12 → (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33,
   f13 → (2 - a2 + 2 a3) f33, f22 → (1 + a3)^2 f33, f23 → -(1 + a3) f33}
```

Out[2301]= {{6 (a2 - 2 (1 + a3))^2 f33, 5 (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33, 4 (2 - a2 + 2 a3) f33},
{5 (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33, 4 (1 + a3)^2 f33, 3 (-1 - a3) f33},
{4 (2 - a2 + 2 a3) f33, 3 (-1 - a3) f33, 2 f33}}

```
In[2302]:=
Det[Fa /. {f11 → (a2 - 2 (1 + a3))^2 f33, f12 → (1 + a3) (a2 - 2 (1 + a3)) f33,
    f13 → (2 - a2 + 2 a3) f33, f22 → (1 + a3)^2 f33, f23 → -(1 + a3) f33}]
```

Out[2302]= 0

In[2303]:=
```
Solve[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /. a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3), λ]
```

Out[2303]= $\left\{\{\lambda \to 3\}, \left\{\lambda \to \frac{1}{2}\left(-a3 - \sqrt{-8 + 4\,a2 - 8\,a3 + a3^2}\right)\right\}, \left\{\lambda \to \frac{1}{2}\left(-a3 + \sqrt{-8 + 4\,a2 - 8\,a3 + a3^2}\right)\right\}\right\}$

In[2304]:=
```
Reduce[Re[1/2 (-a3 - Sqrt[-8 + 4 a2 - 8 a3 + a3^2])] ≥ 3 &&
  Re[1/2 (-a3 + Sqrt[-8 + 4 a2 - 8 a3 + a3^2])] ≥ 3 && Im[a2] == 0 && Im[a3] == 0, a2]
```

Out[2304]= $\left(a3 \le -6 \,\&\&\, a2 \le \frac{1}{4}\left(8 + 8\,a3 - a3^2\right)\right) \,||\, \left(a3 < -6 \,\&\&\, \frac{1}{4}\left(8 + 8\,a3 - a3^2\right) < a2 \le 11 + 5\,a3\right)$

In[2305]:=
```
a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3) && a3 < -4 && a2 < 6 + 4 a3
```

Out[2305]= a1 → 3 (-2 + a2 - 2 a3) && a3 < -4 && a2 < 6 + 4 a3

In[2306]:=
```
FindInstance[a1 == 3 (-2 + a2 - 2 a3) && a3 < -4 && a2 < 6 + 4 a3, {a1, a2, a3}]
```

Out[2306]= {{a1 → -30, a2 → -18, a3 → -5}}

In[2307]:=
```
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals]
```

Out[2307]= θ

```
aa1 = -30;
aa = -18;
aaa = -5;
a = {a1, a2, a3} /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/5;
P = Collect[(2 * a0 * θ - Ff. y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}, θ]
x10 = -1;
x20 = -2;
x30 = 5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[4, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa, ", a3=", aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol4 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
   x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
          (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
       a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol4]
```

Out[2315]= $-100\,x1^2 - 80\,x1\,x2\,\theta + \left(-16\,x2^2 - 20\,x1\,x3\right)\theta^2 - 8\,x2\,x3\,\theta^3 - x3^2\,\theta^4 + \frac{2\,\theta^6}{5}$

Out[2319]= $-100 - 160\,\theta + 36\,\theta^2 + 80\,\theta^3 - 25\,\theta^4 + \frac{2\,\theta^6}{5}$

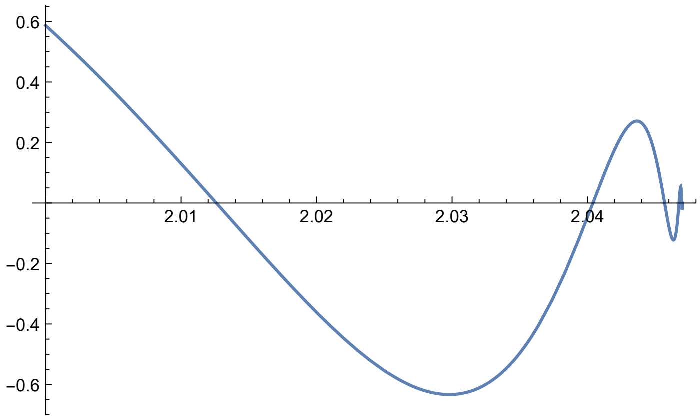
a1=-30, a2=-18, a3=-5

θ0=2.04701

{0.0000401484}

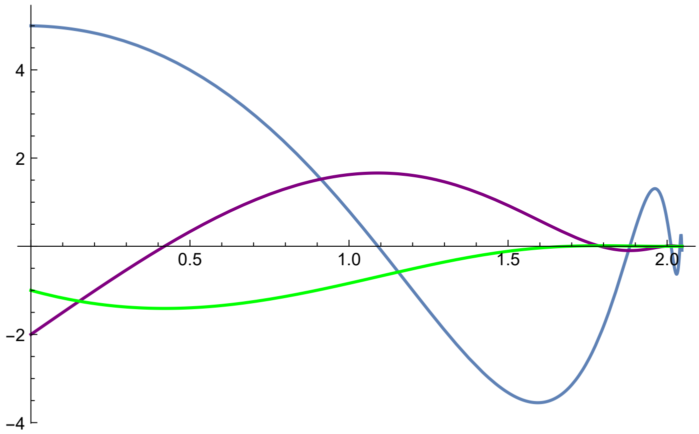
In[2325]:= `Plot[x3[t] /. sol4, {t, 2, θ0}]`

Out[2325]=



In[2326]:=
```
p41 = Plot[x1[t] /. sol4, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green];
p42 = Plot[x2[t] /. sol4, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Purple];
p43 = Plot[x3[t] /. sol4, {t, 0, θ0}];
Show[p43, p42, p41, PlotRange → All]
```

Out[2329]=



In[2330]:=

In[2331]:=

случай когда елем Φ меньше нуля

In[2332]:=
```
{{(3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)), (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), -3 (3 + a3)},
 {(3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), 12 - a2 + 7 a3 + a3^2, -1 - a3}, {-3 (3 + a3), -1 - a3, 1}}
```

Out[2332]=
```
{{(3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)), (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), -3 (3 + a3)},
 {(3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), 12 - a2 + 7 a3 + a3^2, -1 - a3}, {-3 (3 + a3), -1 - a3, 1}}
```

In[2333]:=
```
FindInstance[a1 == -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) &&
  a3 < -5 && a2 < 12 + 5 a3 && (-a2 + 5 (4 + a3)) < 0, {a1, a2, a3}]
```

Out[2333]= `{}`

```
In[2334]:= {{(3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)), (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), -3 (3 + a3)},
   {(3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), 12 - a2 + 7 a3 + a3^2, -1 - a3},
   {-3 (3 + a3), -1 - a3, 1}} /. {a1 -> -51/2, a2 -> -37/2, a3 -> -6}

Out[2334]= {{153/2, 87/2, 9}, {87/2, 49/2, 5}, {9, 5, 1}}

In[2335]:= Reduce[8 + 2 a3 < a2 < 12 + 5 a3 && a2 < 0 && a3 < 0, {a2}]

Out[2335]= False

In[2336]:=

In[2337]:=

In[2338]:=

In[2339]:= Simplify[Solve[{6 f11 + 2 a1 f13 == 0, f11 + 5 f12 + a2 f13 + a1 f23 == 0,
      f12 + (4 + a3) f13 + a1 f33 == 0, f12 + 2 f22 + a2 f23 == 0 ,
      f13 + f22 + 3 f23 + a3 f23 + a2 f33 == 0, f23 + f33 + a3 f33 == 0} /.
     a1 -> -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3), {f11, f12, f13, f22, f23}]]

Out[2339]= {{f11 -> (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, f12 -> (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33,
   f13 -> -3 (3 + a3) f33, f22 -> (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 -> -(1 + a3) f33}}

In[2340]:= FF1 = Simplify[
    F /. {f11 -> (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, f12 -> (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33,
      f13 -> -3 (3 + a3) f33, f22 -> (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 -> -(1 + a3) f33}]
   Ff1 = FF1 /. {f33 -> 1}

Out[2340]= {{(3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33, -3 (3 + a3) f33},
  {(3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33, (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, -(1 + a3) f33},
  {-3 (3 + a3) f33, -(1 + a3) f33, f33}}

Out[2341]= {{(3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)), (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), -3 (3 + a3)},
  {(3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), 12 - a2 + 7 a3 + a3^2, -1 - a3}, {-3 (3 + a3), -1 - a3, 1}}

In[2342]:= Det[FF1]

Out[2342]= 0

In[2343]:= Solve[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /. a1 -> -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) , λ]

Out[2343]= {{λ -> 3 - Sqrt[-11 + a2 - 5 a3]}, {λ -> 3 + Sqrt[-11 + a2 - 5 a3]}, {λ -> -3 - a3}}

In[2344]:=
   Simplify[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /. a1 -> -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3)]

Out[2344]= (3 + a3 + λ) (20 - a2 + 5 a3 - 6 λ + λ^2) == 0

In[2345]:= Reduce[Re[3 - Sqrt[-11 + a2 - 5 a3]] ≥ 3 &&
    Re[3 + Sqrt[-11 + a2 - 5 a3]] ≥ 3 && -3 - a3 ≥ 3 && Im[a2] == 0 && Im[a3] == 0, a2]

Out[2345]= a3 ≤ -6 && a2 ≤ 11 + 5 a3

In[2346]:= a1 -> -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) && a3 < -5 && a2 < 12 + 5 a3

Out[2346]= a1 -> (3 + a3) (20 - a2 + 5 a3) && a3 < -5 && a2 < 12 + 5 a3
```

In[2347]:=

In[2348]:=
```
FF1 /. {f33 → -12, a2 → -30, a3 → -6}
```
Out[2348]=
```
{{-2160, -936, -108}, {-936, -432, -60}, {-108, -60, -12}}
```

In[2349]:=
```
NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals]
```
Out[2349]=
```
{{θ → -9.10429}, {θ → -0.848407}, {θ → -0.804418}, {θ → 2.04701}}
```

In[2350]:=
```
aa1 = -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) /. a2 → aa /. a3 → aaa;
aa = -30;
aaa = -6;
a = {a1, a2, a3} /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/5;
P =
 Collect[(2 * a0 * θ - FF1 . y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa, f33 → -12}, θ]
x10 = -1;
x20 = -2;
x30 = 5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa, ", a3=", aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol3 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
      (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
     a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol3]
```
Out[2357]= $2160\,x1^2 + 1872\,x1\,x2\,\theta + (432\,x2^2 + 216\,x1\,x3)\,\theta^2 + 120\,x2\,x3\,\theta^3 + 12\,x3^2\,\theta^4 + \frac{2\,\theta^6}{5}$

Out[2361]= $2160 + 3744\,\theta + 648\,\theta^2 - 1200\,\theta^3 + 300\,\theta^4 + \frac{2\,\theta^6}{5}$

a1=-26, a2=-30, a3=-6

θ0=θ /. {}⟦2, 1⟧

$\sqrt{(x1[\theta /. \{\}⟦2,1⟧]^2 + x2[\theta /. \{\}⟦2,1⟧]^2 + x3[\theta /. \{\}⟦2,1⟧]^2)}$ /.

NDSolve[{x1′[t] == x2[t], x2′[t] == x3[t],

$x3'[t] == -\frac{26\,x1[t]}{(-t + (\theta /. \{\}⟦2,1⟧))^3} - \frac{30\,x2[t]}{(-t + (\theta /. \{\}⟦2,1⟧))^2} - \frac{6\,x3[t]}{-t + (\theta /. \{\}⟦2,1⟧)}$,

x1[0] == -1, x2[0] == -2, x3[0] == 5}, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ /. {}⟦2, 1⟧}]

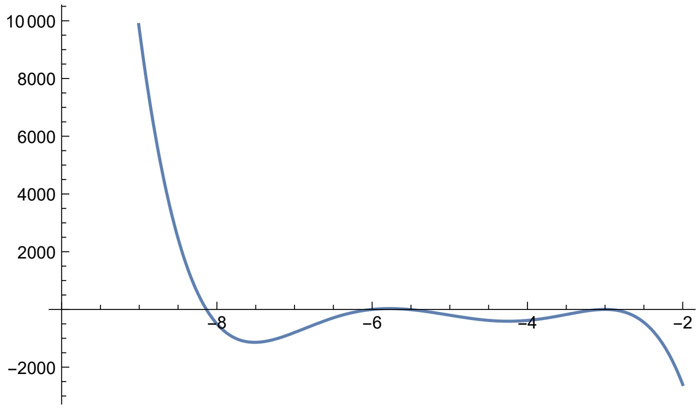
In[2367]:=
```
Simplify[Det[{{(3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33},
    {(3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33, (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33}}]]
```
Out[2367]= $-(-11 + a2 - 5\,a3)\,(12 + 7\,a3 + a3^2)^2\,f33^2$

```
In[2368]:= Ffa2 = Fa /. {f11 → (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, f12 → (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33,
     f13 → -3 (3 + a3) f33, f22 → (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 → -(1 + a3) f33} /. f33 → 1

Out[2368]= {{6 (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)), 5 (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), -12 (3 + a3)},
  {5 (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)), 4 (12 - a2 + 7 a3 + a3^2), 3 (-1 - a3)},
  {-12 (3 + a3), 3 (-1 - a3), 2}}
```

```
In[2369]:= pp = Simplify[Det[Fa /. {f11 → (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33,
        f12 → (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33, f13 → -3 (3 + a3) f33,
        f22 → (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 → -(1 + a3) f33}]] /. f33 → 1

Out[2369]= -2 (3 + a3)^2 (1276 + a2^2 + 1031 a3 + 238 a3^2 + 15 a3^3 - a2 (127 + 46 a3 + 3 a3^2))
```

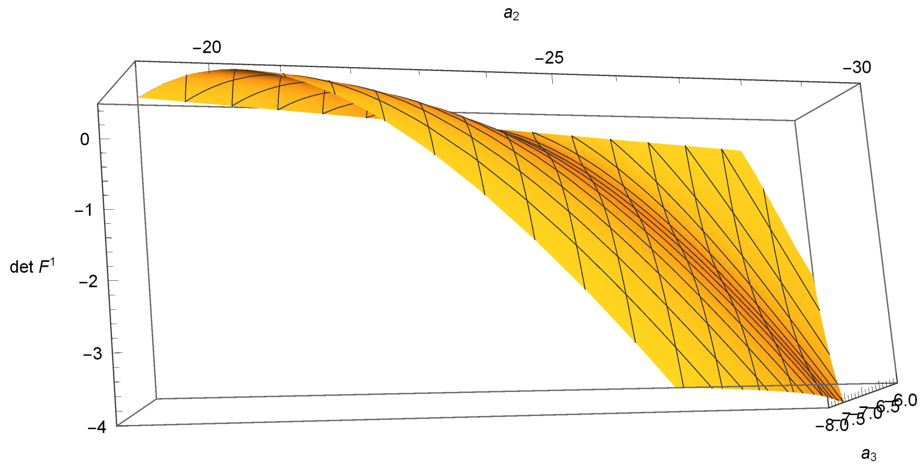
```
In[2370]:= Plot[pp /. a2 → -19, {a3, -10, -2}]
```

Out[2370]=




```
In[2371]:= ParametricPlot3D[
  {a2, a3, 1/((3 + a3) (20 - a2 + 5 a3)) (-7656 + 762 a2 - 6 a2^2 - 8738 a3 + 530 a2 a3 -
      2 a2^2 a3 - 3490 a3^2 + 110 a2 a3^2 - 566 a3^3 + 6 a2 a3^3 - 30 a3^4)},
  {a2, -30, -19}, {a3, 1/5 (-11 + a2), -6}, AxesLabel → {"a₂", "a₃", "det F¹"},
  PlotRange → {{-30, -19}, {-8, -6}, {-4, 0.5}}]
```

Out[2371]=



det F=0 and det Fa<0

In[2372]:=
```
FindInstance[pp < 0 && a2 < 0 && a2 > -25 &&
  a1 == -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) && a3 ≤ -6 && a2 ≤ 11 + 5 a3, {a1, a2, a3}]
```

Out[2372]= $\left\{\left\{a1 \to -\frac{4851}{128}, a2 \to -\frac{397}{16}, a3 \to -\frac{57}{8}\right\}\right\}$

In[2373]:=
```
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals]
```

Out[2373]= θ

In[2374]:=
```
aa1 = -38;
aa = -49/2;
aaa = -7;
a = {a1, a2, a3} /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/200;
P = Collect[(2 * a0 * θ - Ff1 . y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}, θ]
x10 = -1;
x20 = -2;
x30 = 5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa, ", a3=", aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol3 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
        (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
      a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol3]
```

Out[2381]= $-152\, x1^2 - 148\, x1\, x2\, \theta + \left(-\frac{73\, x2^2}{2} - 24\, x1\, x3\right) \theta^2 - 12\, x2\, x3\, \theta^3 - x3^2\, \theta^4 + \frac{\theta^6}{100}$

Out[2385]= $-152 - 296\,\theta - 26\,\theta^2 + 120\,\theta^3 - 25\,\theta^4 + \frac{\theta^6}{100}$

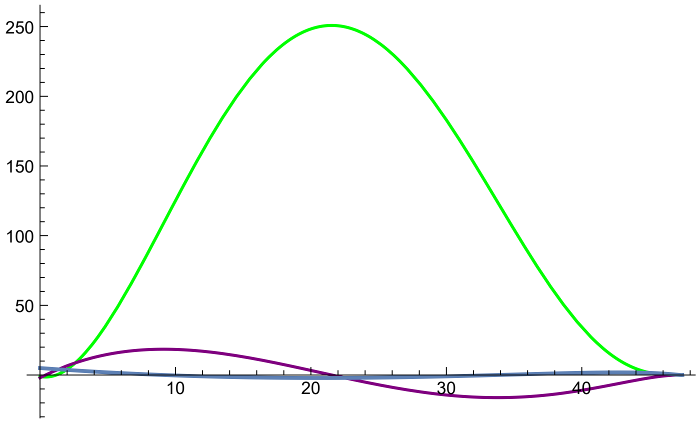
a1=-38, a2=$-\frac{49}{2}$, a3=-7

θ0=47.4169

$\{4.80054 \times 10^{-8}\}$

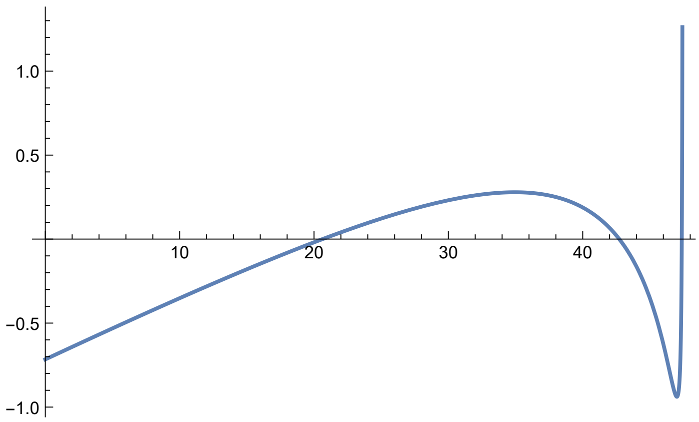
```
In[2391]:= p31 = Plot[x1[t] /. sol3, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green, PlotStyle → Thick];
           p32 = Plot[x2[t] /. sol3, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Purple, PlotStyle → Thick];
           p33 = Plot[x3[t] /. sol3, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Thick];
           Show[p31, p32, p33, PlotRange → All]
```

Out[2394]=




```
In[2395]:= (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t) /.
              a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1 /. sol3 /. t -> θ0 - 0.000001

Out[2395]= {1.1526}

In[2396]:= Plot[(a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t) /.
              a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1 /. sol3, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Thick]
```

Out[2396]=




```
In[2397]:= Det[Fa /. {f11 → (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, f12 → (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33,
              f13 → -3 (3 + a3) f33, f22 → (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 → -(1 + a3) f33} /.
            f33 → 1 /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}]

Out[2397]= -8
```

det F=0 and det Fa>0

```
In[2398]:= FindInstance[Reduce[pp > 0 && a2 < 0 && a3 < 0, a2] &&
            a1 == -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) && a3 ≤ -6 && a2 ≤ 11 + 5 a3, {a1, a2, a3}]
```

Out[2398]= $\left\{\left\{a1 \to -\frac{133}{4},\ a2 \to -22,\ a3 \to -\frac{13}{2}\right\}\right\}$

In[2399]:= `Ff1 /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa} // MatrixForm`

Out[2399]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 152 & 74 & 12 \\ 74 & \frac{73}{2} & 6 \\ 12 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

In[2400]:= $\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 52 & 32 \\ 32 & 20 \end{pmatrix}\right]$

Out[2400]= 16

In[2401]:= `Clear[a1]`

In[2402]:=

```
aa1 = -133/4;
aa = -22;
aaa = -13/2;
a = {a1, a2, a3} /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/400;
P = Collect[(2 * a0 * θ - Ff1 . y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}, θ]
x10 = -1;
x20 = -2;
x30 = 5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa, ", a3=", aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol2 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
        (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
      a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol2]
```

Out[2409]= $-\frac{931\,x1^2}{8} - 119\,x1\,x2\,\theta + \left(-\frac{123\,x2^2}{4} - 21\,x1\,x3\right)\theta^2 - 11\,x2\,x3\,\theta^3 - x3^2\,\theta^4 + \frac{\theta^6}{200}$

Out[2413]= $-\frac{931}{8} - 238\,\theta - 18\,\theta^2 + 110\,\theta^3 - 25\,\theta^4 + \frac{\theta^6}{200}$

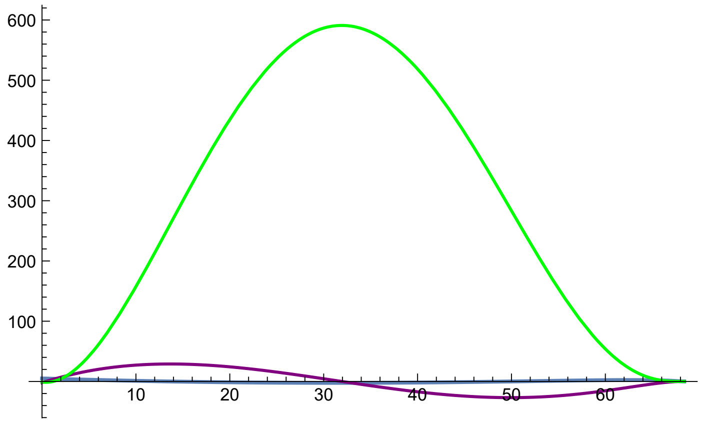
a1= $-\frac{133}{4}$, a2=-22, a3= $-\frac{13}{2}$

θ0=68.4055

$\{2.82352 \times 10^{-8}\}$

In[2419]:=
```
p21 = Plot[x1[t] /. sol2, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green, PlotStyle → Thick];
p22 = Plot[x2[t] /. sol2, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Purple, PlotStyle → Thick];
p23 = Plot[x3[t] /. sol2, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Thick];
Show[p23, p22, p21, PlotRange → All]
```

Out[2422]=

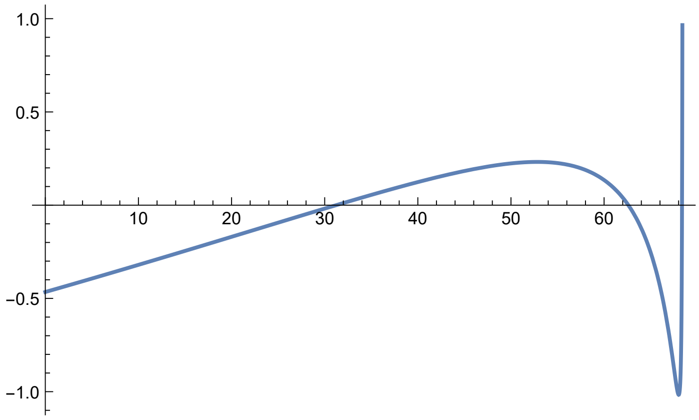


In[2423]:=
```
(a1 * x1[t]) / (θ0 - t) ^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t) ^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t) /.
    a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1 /. sol2 /. t → 0
```

Out[2423]= {-0.465601}

In[2424]:=
```
Plot[(a1 * x1[t]) / (θ0 - t) ^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t) ^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t) /.
    a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1 /. sol2, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Thick]
```

Out[2424]=



In[2425]:=
```
Det[Fa /. {f11 → (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, f12 → (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33,
    f13 → -3 (3 + a3) f33, f22 → (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 → -(1 + a3) f33} /.
  f33 → 1 /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}]
```

Out[2425]= $\frac{343}{16}$

In[2426]:=

det F and det Fa=0

Смотрим для каких параметров определитель Fa = 0

In[2427]:=
```
Solve[(-7656 + 762 a2 - 6 a2^2 - 8738 a3 + 530 a2 a3 -
    2 a2^2 a3 - 3490 a3^2 + 110 a2 a3^2 - 566 a3^3 + 6 a2 a3^3 - 30 a3^4) == 0, a2]
```

Out[2427]= $\{\{a2 \to 11 + 5\, a3\}, \{a2 \to 116 + 41\, a3 + 3\, a3^2\}\}$

```
In[2428]:= Solve[11 + 5 a3 == 116 + 41 a3 + 3 a3^2, a3]

Out[2428]= {{a3 → -7}, {a3 → -5}}

In[2429]:= 11 + 5 a3 /. {{a3 → -7}, {a3 → -5}}

Out[2429]= {-24, -14}

In[2430]:=

In[2431]:= Solve[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /.
       a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) /. a3 -> -7 /. a2 → -24, λ]

Out[2431]= {{λ → 3}, {λ → 3}, {λ → 4}}

In[2432]:= Solve[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /.
       a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) /. a3 -> -5 /. a2 → -14, λ]

Out[2432]= {{λ → 2}, {λ → 3}, {λ → 3}}

In[2433]:= Solve[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /.
     a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) /. a2 -> 11 + 5 a3, λ]

Out[2433]= {{λ → 3}, {λ → 3}, {λ → -3 - a3}}

In[2434]:= Reduce[-3 - a3 ≥ 3, a3]

Out[2434]= a3 ≤ -6

In[2435]:= a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) && a2 -> 11 + 5 a3 && a3 < -5

Out[2435]= a1 → (3 + a3) (20 - a2 + 5 a3) && a2 → 11 + 5 a3 && a3 < -5

In[2436]:= Solve[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 == 0 /. a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) /.
    a2 -> 116 + 41 a3 + 3 a3^2, λ]

Out[2436]= {{λ → -3 - a3}, {λ → 3 - Sqrt[3] Sqrt[35 + 12 a3 + a3^2]}, {λ → 3 + Sqrt[3] Sqrt[35 + 12 a3 + a3^2]}}

In[2437]:= Reduce[Re[3 - Sqrt[3] Sqrt[35 + 12 a3 + a3^2]] ≥ 3 &&
    Re[3 + Sqrt[3] Sqrt[35 + 12 a3 + a3^2]] ≥ 3 && -3 - a3 ≥ 3 && Im[a2] == 0 && Im[a3] == 0, a3]

Out[2437]= a2 ∈ Reals && -7 ≤ a3 ≤ -6

In[2438]:= a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) && a2 -> 116 + 41 a3 + 3 a3^2 && -6 - 2/Sqrt[3] < a3 < -5

Out[2438]= a1 → (3 + a3) (20 - a2 + 5 a3) && a2 → 116 + 41 a3 + 3 a3^2 && -6 - 2/Sqrt[3] < a3 < -5

In[2439]:= FindInstance[a1 == -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) &&
    a2 == 116 + 41 a3 + 3 a3^2 && -7 ≤ a3 ≤ -6 && a3 == -6, {a1, a2, a3}]

Out[2439]= {{a1 → -36, a2 → -22, a3 → -6}}
```

In[2547]:=
```
aa1 = -36;
aa = -22;
aaa = -6;
a = {a1, a2, a3} /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/400;
P = Collect[(2 * a0 * θ - Ff1 . y . y) * (θ^5) /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}, θ]
x10 = -1;
x20 = -2;
x30 = 5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals]
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa, ", a3=", aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol1 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
       (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
     a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol]
```

Out[2554]= $-108\,x1^2 - 108\,x1\,x2\,\theta + \left(-28\,x2^2 - 18\,x1\,x3\right)\theta^2 - 10\,x2\,x3\,\theta^3 - x3^2\,\theta^4 + \frac{\theta^6}{200}$

Out[2558]= $-108 - 216\,\theta - 22\,\theta^2 + 100\,\theta^3 - 25\,\theta^4 + \frac{\theta^6}{200}$

Out[2559]= $\{\{\theta \to -72.6365\}, \{\theta \to 68.6268\}\}$

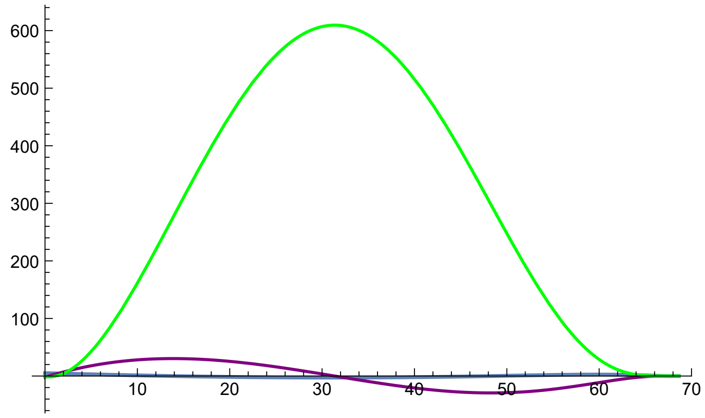
a1=-36, a2=-22, a3=-6

θ0=68.6268

$\{1.88442 \times 10^{35}\}$

In[2565]:=
```
p11 = Plot[x1[t] /. sol1, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green, PlotStyle → Thick];
p12 = Plot[x2[t] /. sol1, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Purple, PlotStyle → Thick];
p13 = Plot[x3[t] /. sol1, {t, 0, θ0} , PlotStyle → Thick];
Show[p13, p12, p11, PlotRange → All]
```

Out[2568]=

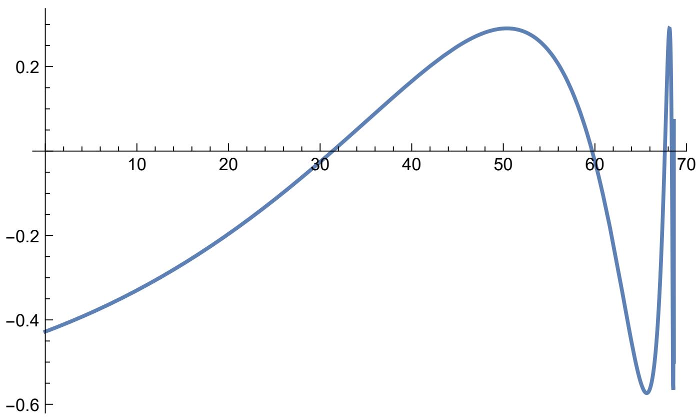


In[2461]:=
```
((a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t)) /.
    a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1 /. sol1 /. t -> θ0 - 0.00001
```

Out[2461]= {0.358676}

In[2462]:=
```
Plot[((a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t)) /.
    a2 → aa /. a3 → aaa /. a1 → aa1 /. sol1, {t, 0, θ0} , PlotStyle → Thick]
```

Out[2462]=



In[2463]:=
```
Det[Fa /. {f11 → (3 + a3)^2 (-a2 + 5 (4 + a3)) f33, f12 → (3 + a3) (a2 - 2 (4 + a3)) f33,
    f13 → -3 (3 + a3) f33, f22 → (12 - a2 + 7 a3 + a3^2) f33, f23 → - (1 + a3) f33} /.
  f33 → 1 /. {a1 → aa1, a2 → aa, a3 → aaa}]
```

Out[2463]= 0

In[2464]:=

Раніше мали

In[2473]:= $a1 < -\frac{75}{2}$ && $a3 \to -6$

Out[2473]= $a1 < -\frac{75}{2}$ && $a3 \to -6$

```
In[2474]:=

In[2475]:= Clear[a1, aa]

In[2569]:= a1 = -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3);
a = {a1, a2, a3};
Dth = DiagonalMatrix[{θ^(-5/2), θ^(-3/2), θ^(-1/2)}];
y = {x1, x2, x3}.Dth;
a0 = 1/5;
P = Collect[(2 * a0 * θ - Ff . y . y) * (θ^5), θ]
x10 = -0.5;
x20 = -0.5;
x30 = 0.5;
PP = Collect[P /. {x1 → x10, x2 → x20, x3 → x30}, θ]
```

Out[2574]= $-(a2-2(1+a3))^2 x1^2 - 2(1+a3)(a2-2(1+a3)) x1 x2 \theta + \left(-(1+a3)^2 x2^2 - 2(2-a2+2a3) x1 x3\right)\theta^2 - 2(-1-a3) x2 x3 \theta^3 - x3^2 \theta^4 + \frac{2\theta^6}{5}$

Out[2578]= $-0.25(a2-2(1+a3))^2 - 0.5(1+a3)(a2-2(1+a3))\theta + \left(-0.25(1+a3)^2 + 0.5(2-a2+2a3)\right)\theta^2 + 0.5(-1-a3)\theta^3 - 0.25\theta^4 + \frac{2\theta^6}{5}$

```
In[2492]:= a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) /. a2 -> 11 + 5 a3 && a3 < -5
```

Out[2492]= $(3+a3)(20+5a3-(11+5a3 \&\& a3<-5)) \to (3+a3)(20+5a3-(11+5a3 \&\& a3<-5))$

```
In[2494]:= aa = -16;
aaa = -42/23;
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", a1 /. a2 -> aa /. a3 → aaa,
  ", a2=", aa /. a3 → aaa, ", a3=", a3 /. a3 → aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
        (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
     a2 -> aa /. a3 → aaa, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol]
```

a1= $\frac{16686}{529}$, a2=-16, a3=- $\frac{42}{23}$

θ0=2.09792

$\{7.10763 \times 10^{30}\}$

```
In[2501]:= a1 → -(-20 + a2 - 5 a3) (3 + a3) && a2 -> 116 + 41 a3 + 3 a3^2 && -6 - 2/Sqrt[3] < a3 < -5
```

Out[2501]= $(3+a3)(20-a2+5a3) \to (3+a3)(20-a2+5a3) \&\& a2 \to 116+41a3+3a3^2 \&\& -6-\frac{2}{\sqrt{3}} < a3 < -5$

In[2502]:=
```
aa = 116 + 41 a3 + 3 a3^2
aaa = -5.5;
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. a2 -> aa /. a3 → aaa, θ, Reals][[2, 1]];
Print["a1=", a1 /. a2 → aa /. a3 → aaa,
  ", a2=", aa /. a3 → aaa, ", a3=", a3 /. a3 → aaa];
Print["θ0=", θ0];
sol = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
        (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
     a2 → aa /. a3 → aaa, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol]
```

Out[2502]= $116 + 41\,a3 + 3\,a3^2$

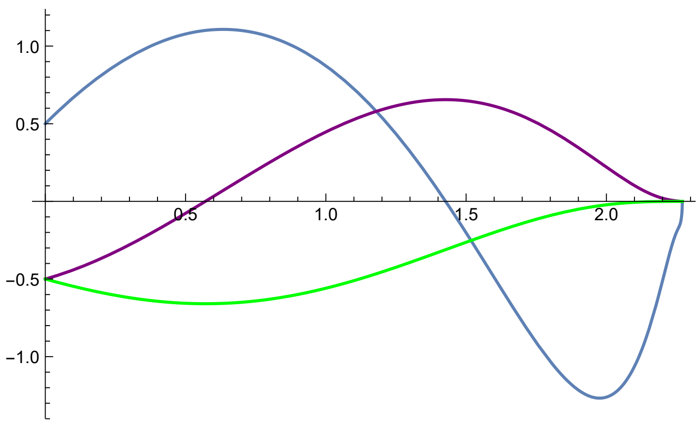
a1=-28.125, a2=-18.75, a3=-5.5

θ0=2.27083

$\{1.76413 \times 10^{-6}\}$

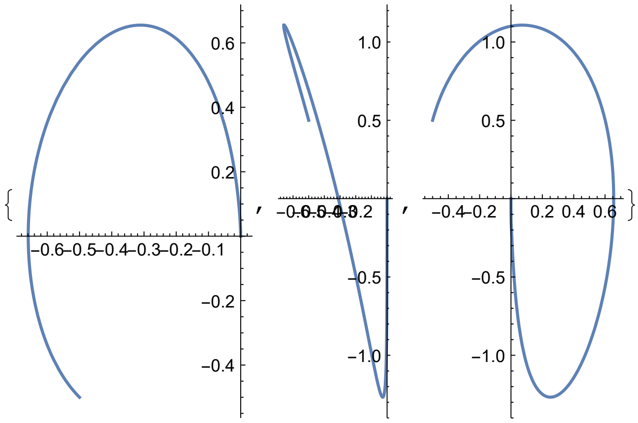
In[2509]:=
```
p1 = Plot[x1[t] /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green];
p2 = Plot[x2[t] /. sol, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Purple];
p3 = Plot[x3[t] /. sol, {t, 0, θ0}];
Show[p3, p2, p1]
```

Out[2512]=



```
In[2513]:= {ParametricPlot[{x1[t], x2[t]} /. sol, {t, 0, θ0}],
            ParametricPlot[{x1[t], x3[t]} /. sol, {t, 0, θ0}],
            ParametricPlot[{x2[t], x3[t]} /. sol, {t, 0, θ0}]}
```

Out[2513]=




```
In[2514]:= "a1="-57", a2="-29", a3="-4.7`

           "a1="-48", a2="-26", a3="-4.8`

Out[2514]= a1=-57, a2=-29, a3=-4.7

Out[2515]= a1=-48, a2=-26, a3=-4.8

In[2516]:= "a1="-93", a2="-41", a3="-10

Out[2516]= a1=-93, a2=-41, a3=-10

In[2517]:=

In[2518]:=

In[2519]:=

In[2580]:= nn = Collect[-λ (λ - 1) (λ - 2) - a3 λ (λ - 1) + a2 λ - a1 , λ]
           λ1 = λ /. FullSimplify[Solve[nn == 0., λ][[1, 1]]]
           λ2 = λ /. Solve[nn == 0., λ][[2, 1]]
           λ3 = λ /. Solve[nn == 0., λ][[3, 1]]
```

Out[2580]= $-(3 + a3)(20 - a2 + 5\, a3) + (-2 + a2 + a3)\,\lambda + (3 - a3)\,\lambda^2 - \lambda^3$

Out[2581]= $3. - 1.\sqrt{-11. + a2 - 5.\, a3}$

Out[2582]= $3. + \sqrt{-11. + a2 - 5.\, a3}$

Out[2583]= $-3. - 1.\, a3$

```
In[2584]:= Reduce[Re[0.5 (-1 a3 - Sqrt[-8 + 4 a2 - 8 a3 + a3^2])] > 2 &&
              Re[0.5 (-1 a3 + 1 Sqrt[-8 + 4 a2 - 8 a3 + a3^2])] > 2 && Im[a2] == 0 && Im[a3] == 0, {a2, a3}]
```

Out[2584]= $a2 < -10.\ \&\&\ \left(4. - 2.\sqrt{6. - 1.\, a2} \le a3 < -4.\ ||\ 0.25\,(-6. + a2) < a3 < 4. - 2.\sqrt{6. - 1.\, a2}\right)$

```
In[2525]:= Reduce[-8 + 4 a2 - 8 a3 + a3^2 > 0 && a2 < 0 && a3 < 0, {a3}]
```

Out[2525]= $a2 < 0\ \&\&\ a3 < 4 - 2\sqrt{6 - a2}$

In[2526]:=

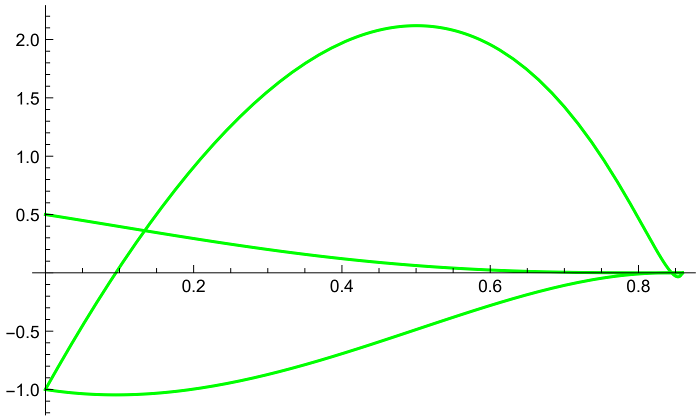
In[2585]:=
```
f1[t_] = Simplify[c1 (θ0 - t)^λ11 +
    (θ0 - t)^λ21 ( c2 * Cos[Log[θ0 - t] λ22] + c3 * Sin[Log[θ0 - t] λ22]) ]
f2[t_] = Simplify[D[f1[t], t]]
f3[t_] = Simplify[D[f1[t], {t, 2}]]
```

Out[2585]= $c1\ (68.6268 - t)^{\lambda 11} + (68.6268 - t)^{\lambda 21}\ (c2\ \text{Cos}[\lambda 22\ \text{Log}[68.6268 - 1.\ t]] + c3\ \text{Sin}[\lambda 22\ \text{Log}[68.6268 - 1.\ t]])$

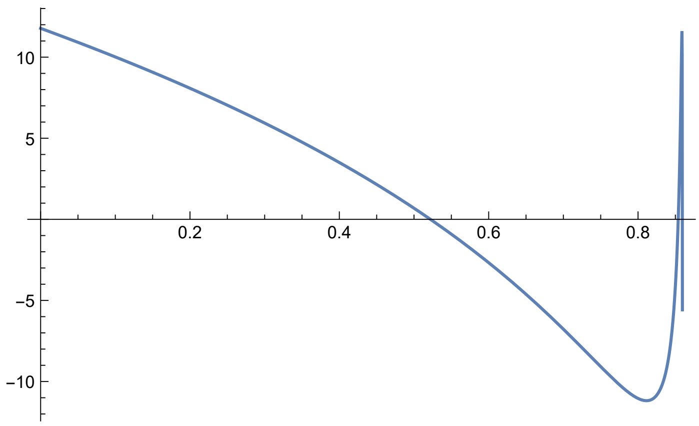
Out[2586]= $\frac{1}{-68.6268 + 1.\ t} \left(1.\ c1\ (68.6268 - t)^{\lambda 11}\ \lambda 11 + (68.6268 - t)^{\lambda 21}\ (1.\ c2\ \lambda 21 + 1.\ c3\ \lambda 22)\ \text{Cos}[\lambda 22\ \text{Log}[68.6268 - 1.\ t]] + (68.6268 - t)^{\lambda 21}\ (1.\ c3\ \lambda 21 - 1.\ c2\ \lambda 22)\ \text{Sin}[\lambda 22\ \text{Log}[68.6268 - 1.\ t]]\right)$

Out[2587]= $\frac{1}{(68.6268 - 1.\ t)^2} \left(c1\ (68.6268 - t)^{\lambda 11}\ \lambda 11\ (-1. + 1.\ \lambda 11) + (68.6268 - t)^{\lambda 21} \left(c3\ (-1. + 2.\ \lambda 21)\ \lambda 22 + c2 \left(-1.\ \lambda 21 + 1.\ \lambda 21^2 - 1.\ \lambda 22^2\right)\right) \text{Cos}[\lambda 22\ \text{Log}[68.6268 - 1.\ t]] + (68.6268 - t)^{\lambda 21} \left(c2\ (1. - 2.\ \lambda 21)\ \lambda 22 + c3 \left(-1.\ \lambda 21 + 1.\ \lambda 21^2 - 1.\ \lambda 22^2\right)\right) \text{Sin}[\lambda 22\ \text{Log}[68.6268 - 1.\ t]]\right)$

```
pl1 = Plot[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. sol1, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Green]
```




```
u31 = Plot[((3 (-2 + a2 - 2 a3) * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 + (a3 * x3[t]) / (θ0 - t)) /. sol1 /.
   {a1 → aa1, a2 → aa2, a3 → aa3}, {t, 0, θ0}]
```



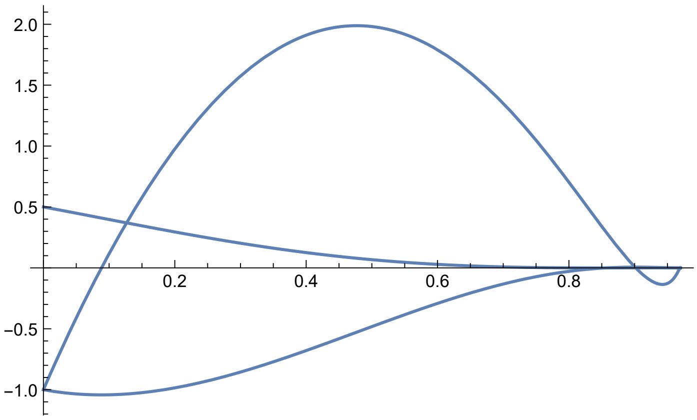

```
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. {a1 → aa1, a2 → aa2, a3 → aa3}, θ, Reals][[3, 1]];
Print["a1=", aa1, ", a2=", aa2, ", a3=", aa3];
Print["θ0=", θ0];
sol2 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
  x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
       (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
    {a1 → aa1, a2 → aa2, a3 → aa3}, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
Print[Sqrt[x1[θ0]^2 + x2[θ0]^2 + x3[θ0]^2] /. sol2]
```

a1=-38, a2=$-\frac{49}{2}$, a3=-7

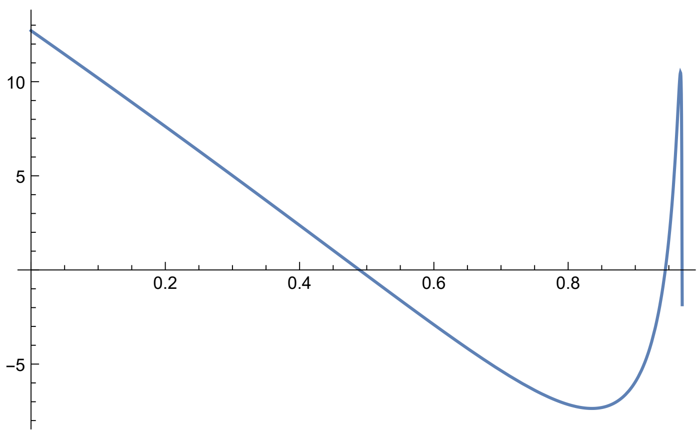
θ0=0.96989

$\{9.30045 \times 10^{-8}\}$

```
pl2 = Plot[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. sol2, {t, 0, θ0}]
```



$$u32 = \text{Plot}\left[\left(\frac{(3\,(-2 + a2 - 2\,a3) * x1[t])}{(\theta0 - t)\,\hat{}\,3} + \frac{(a2 * x2[t])}{(\theta0 - t)\,\hat{}\,2} + \frac{(a3 * x3[t])}{(\theta0 - t)}\right) /.\ sol2 /.\ \{a1 \to aa1,\ a2 \to aa2,\ a3 \to aa3\},\ \{t, 0, \theta0\}\right]$$



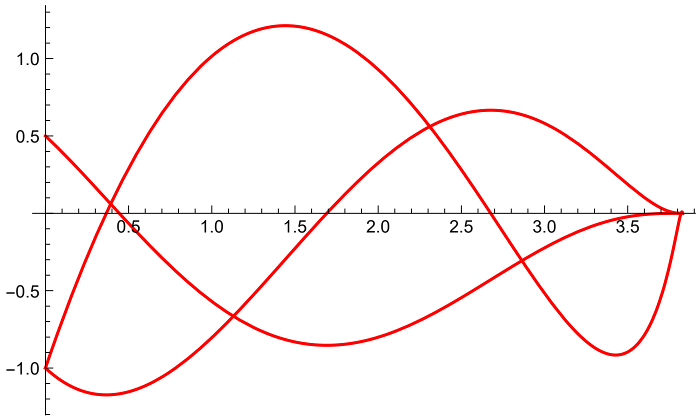

```
θ0 = θ /. NSolve[PP == 0 /. {a1 → aa1, a2 → aa2, a3 → aa3}, θ, Reals][[4, 1]];
Print["θ0=", θ0];
sol3 = NDSolve[{x1'[t] == x2[t], x2'[t] == x3[t],
   x3'[t] == (a1 * x1[t]) / (θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t]) / (θ0 - t)^2 +
       (a3 * x3[t]) / (θ0 - t), x1[0] == x10, x2[0] == x20, x3[0] == x30} /.
    {a1 → aa1, a2 → aa2, a3 → aa3}, {x1, x2, x3}, {t, 0, θ0}];
```

$\text{Print}\left[\sqrt{x1[\theta0]\hat{}2 + x2[\theta0]\hat{}2 + x3[\theta0]\hat{}2}\ /.\ sol3\right]$

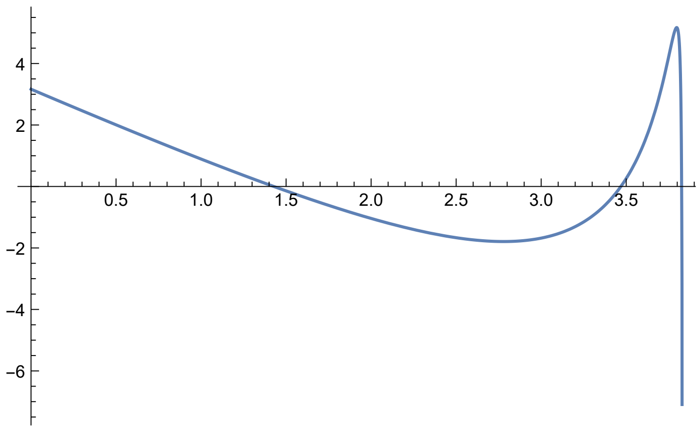
θ0=3.82929

$\{8.80786 \times 10^{-7}\}$

```
pl3 = Plot[{x1[t], x2[t], x3[t]} /. sol3, {t, 0, θ0}, PlotStyle → Red]
```




```
u32 = Plot[((3 (-2 + a2 - 2 a3) * x1[t])/(θ0 - t)^3 + (a2 * x2[t])/(θ0 - t)^2 + (a3 * x3[t])/(θ0 - t)) /. sol3 /.
    {a1 → aa1, a2 → aa2, a3 → aa3}, {t, 0, θ0}]
```




```
Show[pl3, pl2, pl1, PlotRange → {{0, 3.85}, {-1.2, 2}}]
```